ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

Band 11 — Seite 253 bis 340

Heft 4 — August 1931

INHALT:

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Bezugsbedingungen und Anzeigenpreise auf der 3. Umschlagseite.
Z. f. ang. Mathem. u. Mech. / Berlin, Juli/August 1931 / Bd. 11 / Heft 4, Seite 253—340.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 11 | August 1931 | Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Benutzung der Fasella-Tabellen zur stufenweisen Flugbahnberechnung unter Berücksichtigung der neuen Versuche über den Luftwiderstand*).

Von *O. v. Eberhard* in Essen-Bredeney.

I. Herleitung der neuen Formeln.

1. Neuere Versuche zur Ermittlung des expliziten Temperatureinflusses auf die Luftwiderstandskurve haben bestätigt, daß die Formel von Prandtl und Sarrau-Darrieus[1])

$$c f(v) = c v^2 K\left(v \frac{s_0}{s}\right) = c \frac{s^2}{s_0^2} \cdot \left(v \frac{s_0}{s}\right)^2 \cdot K\left(v \frac{s_0}{s}\right) = c \cdot \frac{s^2}{s_0^2} F\left(v \frac{s_0}{s}\right)$$

die wirklichen Verhältnisse mit befriedigender Genauigkeit wiedergibt. Dabei ist s die Schallgeschwindigkeit am Versuchsort, s_0 die Schallgeschwindigkeit bei Normaltemperatur $T_0 = 273 + t_0$,

also $$\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Die Hauptgleichung der äußeren Ballistik lautet hiernach jetzt richtig[2])

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \frac{g_y\, d(v\cos\vartheta)}{v\cos\vartheta\, c_y \frac{s^2}{s_0^2} F\left(v \frac{s_0}{s}\right)\cos\vartheta}.$$

*) Diese Arbeit ist die Ausführung und Erweiterung eines vom Verfasser im Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik von Auerbach-Hort, Band II, Lieferung 1, S. 232 u. f. skizzierten Gedankenganges unter teilweiser Anlehnung an eine frühere Arbeit (Neue Versuche über den Luftwiderstand usw. von O. v. Eberhard, Artl. Monatsh. Septbr. 1912). Die Buchstabenbezeichnung in den Formeln stimmt mit der von C. Cranz in seiner „Ballistik" verwendeten überein.

[1]) Sarrau, Cours de Mécanique de l'école polytechn. 1883 bis 1884. — Darrieus, Mémor. de l'artill. franç. 1922, Heft 2, S. 241 u. folg. — Vessiot, Mémor. de l'artill. franç. 1925, Heft 4, S. 2 u. folg.

[2]) Die Veränderlichkeit der Größe von g mit der Höhe wurde in der Formel behalten, da sich beim stufenweisen Rechnen der richtige Mittelwert von g für die betreffende Stufe ohne merkbare Vergrößerung der Rechenarbeit berücksichtigen läßt, weil andererseits die Fasellaschen Tabellen für ein anderes g berechnet sind, als für den in Deutschland üblichen Mittelwert von 9,81.

Führt man nun statt v eine Hilfsvariable $v_H = v \cdot \frac{s_0}{s}$ ein, also statt der bisher üblichen Pseudogeschwindigkeit $u = \frac{v \cdot \cos\vartheta}{\sigma}$ eine neue unabhängige Variable $w = u \cdot \frac{s_0}{s}$, wobei s innerhalb einer bestimmten Höhenstufe einen der mittleren Temperatur T der Stufe entsprechenden konstanten Wert haben möge, so wird für diese Stufe die angenäherte Hauptgleichung

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \frac{g_y\, d w}{c_y \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \gamma\, w F(w)} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Durch Integration findet man hieraus

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2 c_y \cdot \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \gamma} \frac{g_y}{9{,}8047} [J(w) - J(w_0)] \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Statt $dx = -\frac{\sigma^2}{\gamma c_y} \cdot \frac{u\, du}{f(u)}$ wird aus $dx = -\frac{v^2}{g_y} d\vartheta$ mit $v = \frac{\sigma u}{\cos\vartheta} = \frac{\sigma w \frac{s}{s_0}}{\cos\vartheta}$ und mit (1)

$$dx = -\frac{\sigma^2}{\gamma c_y} \cdot \frac{w\, dw}{F(w)},$$

woraus $$x = \frac{\sigma^2}{\gamma c_y} [D(w) - D(w_0)] \text{ folgt.}$$

Ebenso findet man

$$t = \frac{\sigma}{c_y \frac{s}{s_0} \gamma} [T(w) - T(w_0)]$$

und aus (2) $$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{x}{2 c_y \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \cdot \gamma} \frac{g_y}{9{,}8047} \left\{ \frac{A(w) - A(w_0)}{D(w) - D(w_0)} - J(w_0) \right\}.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise mit $\sigma = \cos\varphi$, $\gamma = \beta_m \cos^2\varphi$ und mit $c'_y = \frac{1}{c_y \beta_m}$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{c'_y s_0^{\,2}}{2\cos^2\varphi\, s^2} \frac{g_y}{9{,}8047} f_4\left(w_0, \frac{x}{c'_y}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2'),$$

$$x = c'_y f_0 (w_0, w) \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$t = \frac{c'_y}{\cos\varphi} \frac{s_0}{s} f_3\left(w_0, \frac{x}{c'_y}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{c'_y}{2\cos^2\varphi} \frac{s_0^{\,2}}{s^2} \frac{g_y}{9{,}8047} f\left(w_0, \frac{x}{c'_y}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

mit $$c'_y = \frac{P}{(2R)^2\, 1000 \cdot i} \frac{\delta_0}{\delta_y} \frac{1}{\beta_m} \text{ [3]).}$$

2. Für β_m ist hier die alte Berechnungsweise des Verfassers unter Verwendung eines Exponenten n (Cranz, Ballistik, 5. Aufl., Bd. 1, S. 248) bedenklich, weil es fraglich ist, für welche Geschwindigkeit n zu wählen ist, ob für w_e oder v_e oder $v_e \frac{s_0}{s}$ oder für einen Mittelwert dieser Größen. Deshalb schlagen wir einen neuen Weg zur Bestimmung von β_m ein[4]).

[3]) Siehe die folgende Fußnote über die Bildung von δ und β.

[4]) Ist für den Beginn einer Höhenstufe, also für $y = y_a$, die Luftdichte $\delta_y = \delta_a$, für das Ende, $y = y_e$ und $\delta_y = \delta_e$, für die mittlere Höhe, $\frac{y_a + y_e}{2}$, $\delta_y = \delta_m$, so ist die mittlere Luftdichte für diese Stufe der Simpsonschen Regel entsprechend zu wählen $\delta_y = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_a + \delta_e}{2} + 2\,\delta_m\right)$.

Im gleichen Sinne ist in der nachstehenden Arbeit in allen Fällen, wenn ein Mittelwert zu bilden war, verfahren worden (so auch beim Aufsuchen der mittleren Werte von K und von k_1).

Die genaue Hauptgleichung lautet

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c'_{0y} \frac{dw}{w\, F\left(v \frac{s_0}{s}\right) \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \cos\vartheta}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c'_{0y} \frac{dw}{w\, F(v_H) \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \cos\vartheta}.$$

Statt dessen ist, den Gedankengängen von Siacci folgend, verwendet worden:

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\varphi} = g_y c'_{0y} \frac{dw}{w\, F(w) \frac{s^2}{s_0^{\,2}} \beta \cos^2\varphi},$$

das heißt, am Anfang des betreffenden Flugbahnstückes wird $F(v_{H_0}) \cos\varphi = \beta\, F(w_0) \cos^2\varphi$ gesetzt, oder da $v_{H_0} = v_0 \frac{s_0}{s} = w_0$ ist,

$$\beta_a = \frac{1}{\cos\varphi};$$

am Ende des Flugbahnstückes

$$F(v_{He}) \cos\vartheta_e = \beta_e\, F(w_e) \cos^2\varphi,$$

also

$$\beta_e = \frac{\cos\vartheta_e}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{F\left(v_e \frac{s_0}{s}\right)}{F(w_e)}.$$

In gleicher Weise findet man für $w_m = \frac{w_a + w_e}{2}$

$$\beta_m = \frac{\cos\vartheta_m}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{F\left(v_m \frac{s_0}{s}\right)}{F(w_m)}.$$

Nun ist

$$\frac{\cos\vartheta_m}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{F\left(v_m \frac{s_0}{s}\right)}{F(w_m)} = \frac{\cos\vartheta_m}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\left(v_m \frac{s_0}{s}\right)^2 K\left(v_m \frac{s_0}{s}\right)}{w_m^{\,2} \cdot K(w_m)}.$$

Ferner ist

$$w_m^{\,2} = v_m^{\,2} \frac{\cos^2\vartheta_m}{\cos^2\varphi} \frac{s_0^{\,2}}{s^2},$$

damit wird

$$\beta_m = \frac{1}{\cos\vartheta_m} \cdot \frac{K\left(v_m \frac{s_0}{s}\right)}{K(w_m)}$$

oder auch

$$\beta_m = \frac{1}{\cos\vartheta_m} \cdot \frac{K\left(\frac{w_m \cos\varphi}{\cos\vartheta_m}\right)}{K(w_m)}.$$

Ebenso findet man

$$\beta_e = \frac{1}{\cos\vartheta_e} \cdot \frac{K\left(\frac{w_e \cos\varphi}{\cos\vartheta_e}\right)}{K(w_e)}.$$

Hat man z. B. zu Beginn einer Höhenstufe $\beta_a = f(w_a)$, am Ende $\beta_e = f(w_e)$, und setzt man $\beta_m = f\left(\frac{w_a + w_e}{2}\right)$, so ist der für die endgültige Rechnung benutzte Mittelwert von β

$$\beta = \frac{1}{3}\left[\frac{\beta_a + \beta_e}{2} + 2\,\beta_m\right].$$

Nur bei den ersten tastenden Rechnungen ist es zulässig, $\beta = \frac{\beta_a + \beta_e}{2}$ zu setzen.

Der Grund zu obiger Art der Mittelwertbildung ist der, daß, wie unten gezeigt wird, die Richtigkeit der Resultate in weitem Maße unabhängig wird von der Höhe der gewählten Stufe. Nur wenn $\frac{|\beta_m - \beta_a|}{|\beta_e - \beta_m|} < \sim \frac{1}{8}$ oder $\frac{|\beta_m - \beta_a|}{|\beta_e - \beta_m|} > \sim 8$ wird, erweist sich die obige Mittelwertbildung als nicht genau genug, und es ist zweckmäßig, die Stufe zu verkleinern.

Somit wird der Mittelwert von β

$$\beta = \frac{1}{3}\left[\frac{\beta_a + \beta_e}{2} + 2\beta_m\right].$$

3. Abänderung von c_y' für vom Siaccischen Normalgeschoß abweichende Geschoßformen.

Jetzt sprechen wir aus, was wir bisher stillschweigend als richtig angenommen haben, nämlich: Die Fasella-Tabelle sei für die richtige $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve des modernen Geschosses aufgestellt. In Wirklichkeit ist die Fasella-Tabelle aus einer für ein Idealgeschoß aufgestellte $K_S\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve berechnet, wobei der Index S bedeutet, daß das von Siacci gewählte Luftwiderstandsgesetz zugrunde gelegt ist.

Abb. 1. $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurven.

Abb. 2. Reduzierte $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve.

Abb. 3. Übergang von der richtigen $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve zur Siaccischen $K_S\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve.

Abb. 4. $k_1 = \dfrac{K_S\left(v\frac{s_0}{s}\right)}{K\left(v\frac{s_0}{s}\right)}$.

Es sei (Abb. 1)

c_1 die Siaccische $K_S\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve für die Normaltemperatur T_0,

c_2 die $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve eines modernen Geschosses für die gleiche Normaltemperatur T_0.

Da man in $cf(v)$ für eine neue Geschoßform über einen Proportionalitätsfaktor in c zunächst frei verfügen kann (durch die Wahl des Faktors wird nur der Formwert i des neuen Geschosses geändert), kann man die Kurve c_2 in der Ordinaten-Richtung proportional beliebig verzerren. Wir verzerren sie so, daß in dem Geschwindigkeitsbereich von etwa 750 m/sec die Kurve c_2, die nun schlechtweg mit $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$ bezeichnet werden möge, mit der Siaccischen $K_S(v)$-Kurve genau zusammenfällt (Abb. 2).

Durch diese Maßnahme wird erreicht, daß der i-Wert des modernen Geschosses für die normalen Geschwindigkeitsbereiche nur wenig von dem für diese neue Geschoßform aus Flugbahnen nach Fasella früher ermittelten i-Wert abweicht.

Berechnet man nun eine Flugbahn in Höhenstufen, so entspricht jeder Stufe ein gewisser Geschwindigkeitsbereich b von w. Es entspreche der untersten Stufe der Geschwindigkeitsbereich b_1, der nächsten der Geschwindigkeitsbereich b_2 usw. (Abb. 3).

Nehmen wir z. B. den Geschwindigkeitsbereich b_2. Innerhalb dieses rechnete man bisher nach Fasella mit dem Stück der Luftwiderstandskurve AB, während man für das moderne Geschoß mit einem Kurvenstück CD hätte rechnen müssen. Wir wollen nun das Stück AB in der Ordinaten-Richtung wieder proportional verzerren, indem wir c mit einem Korrektionsfaktor k multiplizieren und k derart bestimmen, daß die aus AB verzerrte Kurve EF möglichst mit DC zusammenfällt. Im Bereiche b_2 ist k etwa 1,05. Rechne ich also für den Bereich b_2 mit $c \cdot k$ statt mit c, so erhalte ich praktisch dieselben Resultate, als ob ich mit CD statt EF gerechnet hätte.

Nun ist in den Fasellaschen Formeln bekanntlich statt c $c' = \frac{1}{c}$ eingeführt. Man muß also, um das obige Resultat zu erhalten, das bisherige c' mit $\frac{1}{k} = k_1$ multiplizieren. $\frac{1}{k}$ ist aber das Verhältnis der C_1-Kurve zur C_3-Kurve im Geschwindigkeitsbereich b_2.

In Abb. 4 ist das Verhältnis k_1 der Ordinaten der C_1-Kurve zu den Ordinaten der C_3-Kurve abhängig von w für ein modernes Geschoß dargestellt.

Man muß demnach, um mit Fasella mit den neuen Erkenntnissen ebenso zu rechnen wie früher und trotzdem die dem neuen Geschoß entsprechende richtige $K\left(v \frac{s_0}{s}\right)$-Kurve zu berücksichtigen, in jeder Stufe, die einem Pseudogeschwindigkeitsbereiche b_m entspricht, den c_y'-Wert mit dem der Stufe entsprechenden mittleren Wert von k_1 multiplizieren. Natürlich muß für jede neue Geschoßform die Luftwiderstandskurve erschossen und die k_1-Kurve ein für allemal gebildet werden.

Um $K\left(v \frac{s_0}{s}\right) = \frac{F(v)}{v^2}$ und damit die Unterlagen der k_1-Kurve zu bilden, wird man zweckmäßig für eine genügende Anzahl von Anfangsgeschwindigkeiten die Flugzeiten t_1, t_2, t_3, t_4 für 4 Punkte: x, $x + 50$, $x + 200$, $x + 250$ m z. B. mit Funkenchronographen messen.

Setzt man dann $\left(\frac{(x+50) - x}{t_2 - t_1}\right) \frac{s_0}{s} = v_{H1}$ und $\left(\frac{(x+250) - (x+200)}{t_4 - t_3}\right) \frac{s_0}{s} = v_{H2}$, so wird genügend genau $\log v_{H2} - \log v_{H1}$, als Ordinate über $\frac{v_{H2} + v_{H1}}{2}$ als Abszisse aufgetragen, dem Wert $K\left(v \frac{s_0}{s}\right)$ proportional, und die so erhaltenen Punkte, durch eine Kurve verbunden, ergeben die hier C_2 genannte Kurve.

II. Durchführung eines Rechenbeispiels.

Um eine Anleitung zu geben, wie die gewonnenen Erkenntnisse praktisch zu verwerten sind, ist nachfolgend ein Rechenbeispiel durchgeführt. (Siehe Anlagen auf Seite 271 bis 273 und die Beilage, welche die Hauptrechnung enthält.)

Es sei für ein 10,5 cm-Geschoß, $d = 0{,}105$ m, $v_0 = 879{,}7$ m, Abgangswinkel $\varphi = 54^0\, 31'$, Geschoßgewicht $P = 12$ kg und $i = 0{,}47287$ im aufsteigenden Ast, $i = 0{,}93652$ im absteigenden Ast, die Flugbahn zu errechnen.

Nach Fasella ist zunächst $c_0' = \frac{P}{1000\, d^2\, i}$, also $\log c_0' = \log \frac{12}{1000 \cdot 0{,}105^2 \cdot 0{,}47287} = 0{,}36206$ für die erste Stufe.

Als Höhe der ersten Stufe der Rechnung (Anlage 1) werde $y = 2000$ m gewählt. Dann ist die mittlere Höhe der Stufe $y_m = 1000$ m. Aus Abb. 5, Luftgewicht und Temperatur am Versuchstage zur Versuchszeit als Funktion der Flugbahnordinate, entnehmen wir für $y_m = 1000$ m ein Luftgewicht $\delta y_m = 1{,}091$[5]) und eine absolute Temperatur $273 + t y_m = 279{,}3$. Hieraus folgt $w_0 = v_0 \cdot \frac{s_0}{s} = 885{,}5$ m. Es werde nun (mit Hilfe von ähnlichen vorliegenden Schlußtafeln) w_e für $y = 2000$ m geschätzt: $w_e = 600$ m/sec. Für den Bereich zwischen $w_0 = 885{,}5$ und $w_e = 600$ wird aus Abb. 4 der Mittelwert von k_1 zu 1,001 bestimmt. Damit ergibt sich das berichtigte $c''_y = c_0' \cdot k_1 \cdot \frac{1{,}206}{\delta y_m}$ zu $\log c''_y = 0{,}40602$. In gleicher Weise wird ϑ_e für $y = 2000$ m nach vorliegenden

Abb.

[5]) Wie oben ausgeführt, ist das mittlere Luftgewicht nach der Formel $\delta y_m = \frac{1}{3}\left[\frac{\delta_a + \delta_e}{2} + 2\,\delta_m\right]$ berechnet. Wenn man so das mittlere Luftgewicht der Stufe bestimmt, bleibt man erfahrungsgemäß in weiten Grenzen unabhängig von der Höhe der Stufe, d. h. man kommt zu denselben Endergebnissen, ob man die Stufe als Ganzes oder in zwei Hälften errechnet. Noch bei Anfangsstufen von 3000 m und Abgangswinkeln über 30° hat sich diese Behauptung beweisen lassen. Bei kleineren Abgangswinkeln, kleinerer v_0 oder kleinerem Kaliber wird sich vielleicht herausstellen, daß die Anfangsstufe kleiner gewählt werden muß.

Vorgängen geschätzt zu $\vartheta_e = 53^0$. Mit obigen Schätzungen wird in Anlage 2 „Berechnung des β-Wertes" mit dieser Berechnung begonnen. Man findet $\frac{w_e \cos\varphi}{\cos\vartheta} = 578{,}7$ m und liest aus Abb. 2 $m = K\left(\frac{w_e \cos\varphi}{\cos\vartheta}\right)$ und $n = K(w_e)$ ab.

Es ergibt sich damit $\log \beta_e = \log \frac{m}{n \cos\vartheta_e} = 0{,}22823$. Da $\log \beta_a = \log \frac{1}{\cos\varphi} = 0{,}23622$ wird, erhält man als angenäherten Wert von $\beta = \frac{\beta_a + \beta_e}{2} = 1{,}707$, also $\log \beta = 0{,}23223$. Hiermit findet man in der Hauptrechnung (Anlage 1) für das angenäherte c'_y $\log \frac{c''_y}{\beta} = \log c'_y = 0{,}17379$.

Abb. 6.

Es wird nun x für $y = 2000$ m geschätzt (bzw. $x = y \cdot \mathrm{cotg} \frac{\varphi + \vartheta_e}{2}$ berechnet) zu 1450 m und damit $\frac{x}{c'_y} = 971{,}8$ gefunden. Für $\frac{x}{c'_y}$ und w_0 wird nun der Fasella-Tabelle $f = 0{,}014933$ entnommen und gemäß Formel (5) y berechnet zu $y = 1985{,}5$ m. (Bei der Berechnung von y wird $\frac{g_y}{9{,}8047}$ gebraucht. Es ist $\frac{g_y}{9{,}8047} = \frac{R^2}{(R + y_m)^2} \frac{g_0}{9{,}8047}$ mit $R = 6370$ km. Da wir in unserem Beispiel $g_0 = 9{,}8047$ gewählt haben, ist $\frac{g_y}{9{,}8047} = \frac{R^2}{(R + y_m)^2}$ gesetzt.)

Da y noch nicht genau mit der gewünschten Höhenstufe $y = 2000$ m übereinstimmt, wird x im Verhältnis $\frac{2000}{1985{,}5}$ vergrößert auf 1461 (zweite Kolonne, Anlage 1). Hiermit wird y nochmals berechnet und jetzt genügend genau zu $y = 2000{,}1$ gefunden. Nunmehr wird mit Hilfe von f_4 aus Fasella nach Formel (2) ϑ_e berechnet zu $53^0\,1'$ und w_e aus Fasella für w_0 und $\frac{x}{c'_y}$ gleich 651,8 entnommen.

(Vorgreifend ist jetzt in Kolonne 3 aus w_0 und w_e $w_m = \frac{w_0 + w_e}{2} = 768{,}7$ zu berechnen.) Mit diesem w_m geht man wieder in Kolonne 2 und berechnet hierfür aus Fasella mit w_0 $\frac{x_m}{c'_y} = 470{,}1$ sowie mit $\frac{x_m}{c'_y}$ und w_0 aus Fasella f_{4m} und $\vartheta_m = 53^0\,55'$.

Abb. 7.

Mit φ, ϑ_m und ϑ_e, w_0, w_m und w_e wird nunmehr in Anlage 2 das berichtigte β in Kolonne 2 berechnet. Man findet $\beta = 1{,}7081$. Die Werte von β_0, β_m und β_e zeichnet man in ein Kurvenblatt ein (siehe Abb. 6), um einen Überblick über den Verlauf der β-Werte zu haben und prüft, ob β_m nicht zu nahe an β_a oder β_e liegt. (Siehe Anmerkung [4]) Seite 254.)

Nunmehr kehren wir zu Anlage 1, Kolonne 3 zurück. Der Geschwindigkeitsbereich der Rechnung Stufe 1 erstreckt sich jetzt von $w_0 = 885{,}5$ bis $w_e = 651{,}8$. Hierfür findet man aus Abb. 4 $k_1 = 1{,}0055$. Daraus ergibt sich ein berichtigter $\log c''_y = 0{,}40798$ und mit dem genauen β $\log c'_y = 0{,}17547$. Mit diesen Werten wird die Rechnung wiederholt, und man er-

hält mit x wie in der ersten Rechnung $y = 2000{,}2$, $\vartheta_e = 53^0\,1$ und $w_e = 652{,}6$[6]). Also stimmen die geschätzten Werte nun genügend genau mit den errechneten überein, denn eine Wiederholung mit $w_e = 652{,}6$ statt $651{,}8$ würde keine Änderung von k_1 und β mehr hervorrufen.

Es folgt jetzt aus

$$v_e = \frac{w_e \cdot \cos\varphi}{\frac{s_0}{s} \cdot \cos\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

$$v_e = 625{,}6^{7)}\ \mathrm{m}$$

und aus (4)

$$t = 3{,}330.$$

Die zweite Stufe beginnt nun mit $v = 625{,}6$ m und $\varphi = 53^0\,1'$[8]).

Als Stufenhöhe wählen wir jetzt z. B. 2000 m. Die Höhe der Stufe ist nicht gleichgültig. Man wählt sie zweckmäßig so, daß im Bereich der einzelnen Stufen kein Maximum oder Minimum von k_1 liegt, um umständliche Erwägungen wegen des besten Mittelwertes von k_1 zu vermeiden,

Da in der 2. Stufe eine solche Schwierigkeit nicht besteht, haben wir sie mit 2000 m Höhe angenommen. Die Rechnung ist ganz analog derjenigen der 1. Stufe durchgeführt.

Die Prüfung des Verlaufs der β-Werte gibt auch zu Bedenken keinen Anlaß.

Die Anfangswerte der 3. Stufe sind $v = 431{,}8$ m und $\varphi = 49^0\,40'$. Dies entspricht einem w_0 von etwa 450. Wir dürfen nun die nächste Stufe im Interesse einer geordneten Mittelwertbildung nur so groß wählen, daß w_e das Maximum der $K\left(v\frac{s_0}{s}\right)$-Kurve nicht wesentlich überschreitet. Man bleibt dann auch in der k_1-Kurve vor dem Minimum, welches bei etwa 350 m liegt. Wir stellen uns also für die 3. Stufe die Aufgabe, y so zu bestimmen, daß $w_e = 370$ m/sec wird.

Der Rechengang ist dann folgender:

Wir schätzen zuerst $y = 1100$ m, errechnen hieraus $w_0 = 450{,}5$ und bestimmen mit Hilfe von Tabelle 1 aus w_0 und $w_e \dfrac{x}{c'_y} = 608{,}1$. Außerdem schätzen wir ϑ_e auf 46^0 und berechnen damit in Anlage 2, Kolonne 5, β angenähert zu 1,4293. Hiermit ergibt sich $\log c'_y = 0{,}32512$ und $\log x = 3{,}10910$. Mit diesem x wird nun y berechnet gleich 1395 und ϑ_e findet man gleich $44^0\,24'$. Da y mit der Schätzung zu Anfang nicht übereinstimmt, wird die Rechnung mit $y = 1395$ m und $\vartheta_e = 44^0\,24'$ wiederholt. Man bildet zuerst aus $w_0 = 451{,}2$ und $w_e = 370$ $w_m = \dfrac{w_0 + w_e}{2} = 410{,}6$ und berechnet hierfür in Kolonne 7, Anlage 1, wie vorn $\vartheta_m = 47^0\,38'$. Hiermit bestimmt man dann in Anlage 2, Kolonne 6, unter Verwendung des vorher gefundenen ϑ_e, ϑ_m und w_m das genauere β.

Mit $\log\beta = 0{,}15827$ ergibt sich dann in Kolonne 8, Anlage 1, $y = 1418{,}8$ m und $\vartheta_e = 44^0\,17'$. Mit diesen Werten, die von den in die Rechnung eingesetzten noch wesentlich abweichen, ist in ganz gleicher Weise die Rechnung unter Verwendung des berichtigten $\vartheta_m = 47^0\,35'$ in Kolonne 9, Anlage 1, und Kolonne 7, Anlage 2, zu wiederholen. Es ergibt sich jetzt $y = 1422{,}5$ m, $\vartheta_e = 44^0\,16'$, was mit den Anfangswerten dieser Rechnung genügend genau übereinstimmt. Man kann also jetzt v_e und t der 3. Stufe mit $v_e = 320{,}0$ m und $t = 5{,}194$ sec berechnen.

Die Prüfung des Verlaufs der β-Werte in Abb. 6 ergibt $\dfrac{|\beta_a - \beta_m|}{|\beta_m - \beta_e|} = \sim \dfrac{1}{5}$. Dieses Verhältnis ist noch zulässig. Man ersieht aber aus Anlage 6, daß die β-Kurve im Bereiche der

[6]) Siehe die Fußnote auf der nächsten Seite wegen Darstellung der Werte von v und w.

[7]) Hat man v_e und w_e für die erste Stufe berechnet, so ist die graphische Darstellung dieser Größen eine bedeutende Erleichterung bei der Aufgabe, aus w_0 der nächsten Stufe w_e abzuschätzen. Es empfiehlt sich deshalb, im Laufe der Bahnberechnung die nebenstehende Abb. 7 zu entwerfen und das gesuchte w_e mit ihrer Hilfe zu bestimmen.
Es zeigt sich überdies, daß, wenn man die im Laufe der Rechnung gefundenen w-Kurvenstücke (Abb. 7) vertikal so verschiebt, daß sie aneinanderschließen, anscheinend stets eine annähernd stetige Kurve (—·—·—·—·— Abb. 7) entsteht, die man, obwohl sie keinen durch Formeln begründeten Sinn hat, doch zur bequemeren Abschätzung des w_e gut tut aufzutragen. Diese Kurve gibt gleichzeitig einen guten Überblick darüber, ob nirgends Rechenfehler unterlaufen sind und gestattet auch, die Höhenstufen so zu wählen, daß w_e jeweils annähernd dem gewünschten Wert entspricht.

[8]) Man könnte der Konvergenz der Vertikalen bei der Berechnung der folgenden Stufen Rechnung tragen, indem man das Koordinatensystem um den sehr kleinen Winkel $\frac{x}{R}$ (R = Erdradius) dreht.
Wir haben diese Komplikation vermieden, da der Einfluß der Konvergenz der Vertikalen leicht in bekannter Weise durch eine Störungsrechnung berücksichtigt werden kann.

3. Stufe stark gekrümmt ist, und zwar, von der w-Achse aus gesehen, aufwärts gekrümmt. Es fragt sich nun, ob diese Krümmung bedenklich ist. Um dies zu untersuchen, wurde die 3. Stufe in 4 Teilstufen unterteilt und nochmals berechnet. Die Endwerte dieser Rechnung zeigen folgende Abweichung der Resultate: $\Delta x = 1{,}3$ m, $\Delta y = 0{,}1$, $\Delta\vartheta = -4{,}3'$ und $\Delta v = -0{,}6$ m. Die Abweichung ist also sehr gering. Sollte sie als zu stark empfunden werden, so wäre es notwendig, die Stufenhöhe bei so stark gekrümmter β-Kurve noch etwas geringer zu wählen.

Die Stufe 4a beginnen wir mit $v = 320{,}0$ und $\varphi = 44^0\,16'$ und wählen, um wieder auf runde Tausende in Σy zu kommen, $y = 977{,}5$ m.

Die Rechnung wird wie bei der ersten Stufe in Kolonne 10 bis 12, Anlage 1, und Kolonne 8 und 9, Anlage 2, durchgeführt und ergibt ein $\beta_m = 0{,}9560$. Es war $\beta_a = 1{,}3965$ und $\beta_e = 0{,}9439$.

$$\frac{|\beta_a - \beta_m|}{|\beta_m - \beta_e|} \text{ ist also gleich } \frac{0{,}4405}{0{,}0121} = \sim \frac{36}{1}.$$

Dies Verhältnis zeigt, daß der Mittelwert von β viel zu nahe an β_e liegt; es muß deshalb die Stufenhöhe stark verringert werden. Wir verkleinern sie auf $y = 577{,}5$ m. Mit diesem y ist die 4. Stufe in Kolonne 13 bis 15, Anlage 1, und Kolonne 10 und 11, Anlage 2, berechnet, so daß wir in Σy gemäß der Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse auf der 1. Seite von Anlage 1 auf $y = 6000$ kommen. Nun genügt das Verhältnis $\frac{|\beta_a - \beta_m|}{|\beta_m - \beta_e|}$, welches jetzt gleich $\frac{0{,}296}{0{,}150}$ ist der vorn gestellten Bedingung, auch der Verlauf der β-Kurve gibt zu Bedenken keinen Anlaß, und es kann daher die 5. Stufe in Angriff genommen werden. Hier erscheint die Form der β-Kurve, wegen der ziemlich starken Krümmung, die auftritt, bedenklich. Um den Einfluß dieser Krümmung zu untersuchen, wurde die 5. Stufe nochmals in 2 Teilen geteilt berechnet. Es ergibt sich dabei kein Unterschied gegenüber der 1. Rechnung mit Ausnahme der Endgeschwindigkeit, welche um 0,2 m abweicht.

Über die weiteren Stufen bis zur Scheitelstufe (siehe die Zusammenstellung auf der ersten Seite von Anlage 1, Seite 271).

Es folgt jetzt die Stufe 8 zum Scheitel.

Wir haben für $v = 206{,}3$ m, $\varphi = 15^0\,14'$.

Gegeben ist in dieser Stufe $\vartheta_e = 0$.

Es wird geschätzt $y = 145$ m, $w_e = 215$ m.

Damit findet man $w_0 = 221{,}4$ und $\log c'_y = 0{,}63580$. Ferner hat man mit obigem φ

$$\log \frac{c'_y}{2\cos^2\varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9{,}8047} = 0{,}42609$$

und damit $\log f_4 = 9{,}00922 - 10$.

Es wird also von unten nach oben mit Hilfe von f_4 und w_0 $\frac{x}{c'_y}$ errechnet und damit x.

Es ergibt sich mit diesem x in Kolonne 25, Anlage 1, ein y von 147,1 m und $w_e = 214{,}7$, was genügend genau mit den Schätzungen übereinstimmt. Da β in dieser Rechnung aber nur angenähert eingesetzt ist, wurde sie in Kolonne 26, Anlage 1 und Kolonne 19, Anlage 2, noch einmal durchgeführt. Wir erhalten jetzt

$$y = 147{,}1 \text{ m},$$
$$x = 1068 \text{ m},$$
$$v_e = 193 \text{ m}$$

und hiermit nach der Zusammenstellung Seite 1, Anlage 1, für den Scheitel $\Sigma y = 7597$ m, $\Sigma x = 8605$ m.

Die Berechnung des absteigenden Astes der Flugbahn wird in ganz gleicher Weise wie diejenige des aufsteigenden Astes durchgeführt.

Es ist nur bei Errechnung des y der Wert für $\frac{c'_y}{2\cos^2\varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9{,}8047} \cdot f \cdot x$ zu dem Wert von $x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ zu addieren, ebenso ist bei Bestimmung von ϑ_e der Wert für $\frac{c_y'}{2\cos^2\varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9{,}8047}$ zu dem für $\operatorname{tg}\varphi$ zu addieren.

Da im absteigenden Ast mit genau denselben Stufenhöhen gerechnet ist wie im aufsteigenden Ast, konnte in der Berechnung des absteigenden Astes ein für allemal $\log \frac{s_0^2}{s^2}$ und $\log \frac{1{,}206}{\delta y_m}$ aus der entsprechenden Stufe des aufsteigenden Astes entnommen werden. Es sind also gleich $\log \frac{s_0^2}{s^2}$ bzw. $\frac{s_0}{s}$ und $\log \frac{1{,}206}{\delta y_m}$ der 8. und 9. Stufe, der 7. und 10. Stufe, der 6. und 11. Stufe usw.

Man findet das Endresultat der Rechnung in der Zusammenstellung auf der Seite 271, Anlage 1.

Ein Überblick über den Verlauf der β-Werte des absteigenden Astes in Anlage 6 zeigte, daß bei der 15. Stufe wieder eine sehr große Veränderlichkeit von β in Verbindung mit stärkerer Krümmung vorliegt.

Um zu prüfen, wie sich diese Verhältnisse im absteigenden Ast geltend machen, ist die 15. Stufe wieder in 2 Teilen berechnet worden. Als Resultat hat man eine Abweichung von der 1. Rechnung von $\Delta x = 2{,}0$ m, $\Delta \vartheta = -4'$, $\Delta v = -0{,}2$ m.

Wenn man die Gesamtrechnung überblickt, zeigt es sich, daß die gewählte Stufenteilung fast niemals ein Maximum oder Minimum der k_1-Kurve in sich schließt.

Es dürfte zweckmäßig sein, die Stufen stets so einzuteilen, daß ein Durchlaufen des Maximums oder Minimums der k_1-Kurve vermieden wird.

Bei größeren c'_y-Werten wird man auch im allgemeinen die Stufenhöhen etwa proportional vergrößern dürfen.

III. Weitere Steigerung der Genauigkeit.

Trägt man in einem kartesischen Koordinatensystem statt β $\frac{1}{\beta}$ als Funktion von w auf, so zeigt es sich, daß bei genügend enger Stufenteilung $\frac{1}{\beta}$ mit großer Annäherung durch eine geneigte Gerade $\frac{1}{\beta} = a - b\,w$ ersetzt werden kann. Es besteht dann die Möglichkeit, statt mit einem Mittelwert von β unter Benutzung der Siaccischen Funktionen mit dem nahezu genauen Verlauf der β-Werte zu arbeiten. Voraussetzung ist dabei, daß man angenäherte Werte von ϑ und y als Funktion von w bereits hat und dadurch in die Lage gesetzt ist, angenäherte Werte von $k_1(w)$ und $K(w)$ zu ermitteln.

Die zweite Annäherung der Hauptgleichung lautet jetzt

$$\frac{d\,\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_{y_m} \cdot c''_{y_m} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \frac{d\,w}{w\,F(w)\cos^2\varphi}(a - b\,w) \quad \text{mit} \quad c''_{y_m} = c_0'\,k_{1m} \cdot \frac{1{,}206}{\delta_{y_m}}$$

und es wird integriert

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2} \cdot c''_{y_m} \frac{s_0^2}{s^2\cos^2\varphi} \cdot \frac{g_{y_m}\,a}{9{,}8047}[J(w) - J(w_0)] + c''_{y_m} \cdot \frac{s_0^2}{s^2\cos^2\varphi} \cdot g_{y_m} \cdot b\,[T(w) - T(w_0)]\,.$$

Die Einführung von β bei Siacci soll bekanntlich in erster Linie den mathematischen Fehler, der bei Ersetzung der genauen Hauptgleichung durch die angenäherte entsteht, ausgleichen.

In unserer bisherigen Rechnung sind aber noch physikalische Fehler vorhanden, welche durch Mittelwertbildung für die betreffende Stufe paralysiert werden sollten. Es wurde ja statt der Variablen c'_y ein Mittelwert c'_{y_m} gesetzt, ferner statt s_y ein Mittelwert s_m, weiter wurde die wirkliche $K(w)$-Kurve durch die Siaccische $K_S(w)$-Kurve ersetzt, indem diese mit einem mittleren Korrektionsfaktor k_{1m} multipliziert wird. Schließlich wurde g_y durch g_{y_m} ersetzt.

Diese physikalischen Fehler lassen sich bei der Rechnung mit $\frac{1}{\beta} \sim a - b\,w$ durch entsprechende Wahl von a und b leicht mit eliminieren.

Die genaue Hauptgleichung lautet

$$\frac{d\,\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y\,c_y^0 \frac{d\,(v\cos\vartheta)}{(v\cos\vartheta)\,v^2\,K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)\cos\vartheta} \quad \text{mit} \quad c_y^0 = \frac{P}{1000\,d^2\,i}\,\frac{1{,}206}{\delta_y}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c_y{}^0 \frac{d(v\cos\vartheta)}{(v\cos\vartheta)\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)^2\left(\frac{s_y}{s_0}\right)^2 K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)\cos\vartheta}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c_y{}^0 \frac{d(v\cos\vartheta)}{(v\cos\vartheta)\left(\frac{s_y}{s_0}\right)^2 F\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)\cos\vartheta}.$$

Hieraus folgt mit $w = \frac{v\cos\vartheta}{\cos\varphi}\cdot\frac{s_0}{s_m}$

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c_y{}^0 \frac{d\left(\frac{v\cos\vartheta}{\cos\varphi}\,\frac{s_0}{s_m}\right)}{\left(\frac{v\cos\vartheta}{\cos\varphi}\,\frac{s_0}{s_m}\right)\left(\frac{s_y}{s_0}\right)^2 F\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)\cos\vartheta}$$

oder mit dem schon oben benutzten w

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_y c_y{}^0 \frac{d\,w}{w\left(\frac{s_y}{s_0}\right)^2 F\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)\cos\vartheta}.$$

Diese genaue Gleichung wird jetzt ersetzt durch die angenäherte

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = g_{y_m} c''_y \frac{d\,w}{\left(\frac{s_m}{s_0}\right)^2 F_S(w)\cos^2\varphi}(a - b\,w) \text{ mit } c''_y = \frac{P\cdot k_{1m}}{1000\,d^2\,i}\,\frac{1{,}206}{\delta_{y_m}}.$$

Setzt man die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen einander gleich, so folgt:

$$a - b\,w \sim \frac{g_y}{g_{y_m}}\cdot\frac{c_y{}^0}{c''_y}\left(\frac{s_m}{s_y}\right)^2\frac{\cos^2\varphi}{\cos\vartheta}\,\frac{F_S(w)}{F\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)}$$

oder

$$a - b\,w \sim \frac{g_y}{g_{y_m}}\cdot\frac{\delta_{y_m}}{\delta_y}\cdot\frac{1}{k_{1m}}\cdot\frac{s_m{}^2}{s_y{}^2}\,\frac{\cos^2\varphi}{\cos\vartheta}\,\frac{w^2 K_S(w)}{v^2\frac{s_0{}^2}{s_y{}^2}K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)}.$$

Da aber

$$w = \frac{v\cos\vartheta}{\cos\varphi}\cdot\frac{s_0}{s_m} \quad\text{und}\quad \frac{K_S(w)}{K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)} = \frac{K_S(w)}{K(w)}\cdot\frac{K(w)}{K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)} = k_{1y}\cdot\frac{K(w)}{K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)},$$

ferner

$$\frac{g_y}{g_{y_m}} = \frac{(R+y_m)^2}{(R+y)^2},\quad \text{folgt schließlich}$$

$$a - b\,w \sim \frac{(R+y_m)^2}{(R+y)^2}\cdot\frac{\delta_{y_m}}{\delta_y}\cdot\frac{k_{1y}}{k_{1m}}\cdot\frac{K(w)}{K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)}\cdot\cos\vartheta.$$

Hat man durch die vorherige schon sehr angenähert richtige Berechnung y und ϑ als Funktion von v aus der graphischen Darstellung für die betreffende Stufe festgestellt, so ist es leicht, die rechte Seite der vorstehenden Gleichung für $a - b\,w$ als Funktion von w zu bestimmen und als Ordinaten über w durch ein Kurvenstück darzustellen.

Um diejenige Gerade $\frac{1}{\beta} = a - b\,w$ zu finden, welche dies Kurvenstück am besten approximiert, werden zwei Wege vorgeschlagen.

Der einfachste ist: Man bestimmt eine Gerade nach dem Augenmaß, die sich dem Kurvenstück möglichst anschmiegt und dabei so beschaffen ist, daß die Fläche zwischen ihr, den Endordinaten und der w-Achse gleich den Flächen zwischen der Kurve, den Endordinaten und der w-Achse wird.

Dieser Weg ist im allgemeinen genügend genau.

Oder: Man verfährt nach der Methode der kleinsten Quadrate. Das heißt, man macht, wenn die Ordinaten des Kurvenstückes mit $\psi(w)$ bezeichnet werden, $J=\int_{w_a}^{w_e}[\psi(w)-(a-bw)]^2\,dw$ zu einem Minimum. Dies ergibt die Bedingungsgleichungen $\frac{\partial J}{\partial a}=0$, $\frac{\partial J}{\partial b}=0$, das heißt,

$-2\int_{w_a}^{w_e}\psi[(w)-(a-bw)]\,dw=0$ und $2\int_{w_a}^{w_e}[\psi(w)-(a-bw)]\,w\,dw=0$.

Diese Bedingungen lassen sich auch schreiben

$$\int_{w_a}^{w_e}\psi(w)\,dw-a[w_e-w_a]+\frac{b}{2}(w_e^2-w_a^2)=0,$$

$$\int_{w_a}^{w_e}\psi(w)\,w\,dw-\frac{a}{2}(w_e^2-w_a^2)+\frac{b}{3}(w_e^3-w_a^3)=0.$$

Nun ist
$$J_3=\int_{w_a}^{w_e}\psi(w)\,w\,dw=w_e\int_{w_a}^{w_e}\psi(w)\,dw-\int_{w_a}^{w_e}dw\int_{w_a}^{w}\psi(w)\,dw.$$

In dieser Form sind, wenn man $\int_{w_a}^{w_e}\psi(w)\,dw=J_1$ und $\int_{w_a}^{w_e}dw\int_{w_a}^{w}\psi(w)\,dw=J_2$ setzt, die Integrale J_1 und J_2 durch einmalige bzw. zweimalige Integration der Kurve $\psi(w)$ von w_a bis w_e mit dem Integraphen von Abdank-Abakanowitz auswertbar. Man muß die Auswertung der Integrale allerdings sehr sorgfältig durchführen [großer Maßstab für $\psi(w)$ (am besten arbeitet man mit $c_3[\psi(w)]-c_2$, wobei c_3 und c_2 passende Konstanten sind)], um die Krümmung in möglichst großem Maßstab darzustellen.

Wenn man sich diese Mühe nicht machen will, so berechnet man besser J_1 und J_3 nach der Simpsonschen Regel.

Unsere beiden Bedingungsgleichungen werden:

$$J_1-a(w_e-w_a)+\frac{b}{2}(w_e^2-w_a^2)=0,$$

$$w_e J_1-J_2-\frac{a}{2}(w_e^2-w_a^2)+\frac{b}{3}(w_e^3-w_a^3)=0.$$

Hieraus folgen a und b,

nämlich
$$b=\frac{12J_2}{(w_e-w_a)^3}-\frac{6J_1}{(w_e-w_a)^2},$$

$$a=6J_2\cdot\frac{w_e+w_a}{(w_e-w_a)^3}-2J_1\cdot\frac{w_e+2w_a}{(w_e-w_a)^2}.$$

oder auch
$$b=\frac{6(w_e+w_a)J_1-12J_3}{(w_e-w_a)^3}$$

und
$$a=\frac{4(w_e^2+w_e w_a+w_a^2)J_1-6(w_e+w_a)J_3}{(w_e-w_a)^3}.$$

Mit obigem a und b wird

$$\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}\varphi-\frac{1}{2}\frac{g y_m}{9{,}8047}\cdot c'' y_m\frac{s_0^2}{s_m^2\cos^2\varphi}\cdot a[J(w)-J(w_0)]$$

$$+g y_m\,c'' y_m\frac{s_0^2}{s_m^2\cos^2\varphi}\cdot b[T(w)-T(w_0)].$$

Hat man so ϑ als Funktion von w genau bestimmt und stehen nur die Siaccischen Funktionen zur Verfügung, so ist es zweckmäßig, x, y und t als Funktion von ϑ durch Quadraturen zu ermitteln, und zwar zunächst

$$y = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \vartheta \, d\vartheta .$$

Hieraus findet man das berichtigte ϑ_e für $y = y_e$.

Mit diesem ϑ_e ist dann

$$x = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_e} \frac{v^2}{g} d\vartheta ,$$

$$t = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_e} \frac{v}{g \cos \vartheta} d\vartheta .$$

Es ist nun in vielen Fällen möglich, die Annäherung noch weiterzutreiben, nämlich dann, wenn der Ausdruck

$$\frac{(R+y_m)^2}{(R+y)^2} \cdot \frac{\delta_{y_m}}{\delta_y} \cdot \frac{k_{1y}}{k_{1m}} \cdot \frac{K(w)}{K\left(v \frac{s_0}{s_y}\right)}$$

als Funktion von w, und zwar als Ordinate über w als Abszisse aufgetragen, weniger von einer Geraden abweicht als

$$\frac{(R+y_m)^2}{(R+y)^2} \cdot \frac{\delta_{y_m}}{\delta_y} \cdot \frac{k_{1y}}{k_{1m}} \cdot \frac{K(w)}{K\left(v \frac{s_0}{s}\right)} \cdot \cos \vartheta ,$$

und wenn man eine Tabelle der Funktion

$$\xi(\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \log \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right]$$

besitzt, wie sie z. B. in Cranz, Ballistik, Bd. IV, 1918, oder Cranz, Ballistik, 5. Aufl., Bd. I, S. 585, zu finden ist.

Schreibt man nämlich die Hodographengleichung

$$\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = g_y \, c_y{}^0 \, \frac{d(v \cos \vartheta)}{(v \cos \vartheta) \, v^2 K\left(v \frac{s_0}{s_y}\right) \cdot \cos^2 \vartheta}$$

und ersetzt sie durch

$$\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = g_m \, c_y{}'' \, \frac{dw}{\left(\frac{s_m}{s_0}\right)^2 F_S(w) \cos^2 \varphi} (a_1 - b w_1) ,$$

so findet man für

$$(a_1 - b_1 w) \sim \frac{(R+y_m)^2}{(R+y)^2} \cdot \frac{\delta_{y_m}}{\delta_y} \cdot \frac{k_{1y}}{k_{1m}} \cdot \frac{K(w)}{K\left(v \frac{s_0}{s}\right)} .$$

Die Ermittlung von a_1 und b_1 erfolgt sinngemäß wie oben und es wird

$$\xi(\vartheta) = \xi(\varphi) - \frac{1}{2} \frac{g_{y_m}}{9{,}8047} \cdot c''_{y_m} \frac{s_0{}^2}{s_m{}^2 \cos^2 \varphi} \, a_1 [J(w) - J(w_a)]$$

$$+ g_{y_m} \, c''_{y_m} \cdot \frac{s_0{}^2}{s_m{}^2 \cos^2 \varphi} \cdot b_1 [T(w) - T(w_0)] .$$

Man sieht: Die Benutzung von $\xi(\vartheta)$ statt von $\operatorname{tg} \vartheta$ bringt den Vorteil mit sich, daß der Korrekturfaktor, der durch $a_1 - b_1 w$ ersetzt werden soll, von der Genauigkeit der vorherigen[9])

[9]) Fortsetzung des Textes auf Seite 268.

Genauigkeitsprüfung der 3. Stufe.

Für $v =$ ist $y =$[1] $\vartheta =$[1]	431,8 4000 49° 40′	399,2 4382,2 48° 35′	362,2 4841,0 46° 58′	343,1 5090,4 45° 54′	330,0 5275 45° 1′	320,0 5422,5 44° 16′
$\log v$	2,63524	2,60122	2,55890	2,53543	2,51851	2,50521
$\log \frac{s_0}{s_m}$	0,01908	0,01908	0,01908	0,01908	0,01908	0,01908
$\log \cos \vartheta$	9,81106	9,82055	9,83405	9,84255	9,84936	9,85447
$\log v \frac{s_0}{s_m} \cdot \cos \vartheta$	2,46538	2,44085	2,41203	2,39706	2,38695	2,37926
$\log \cos \varphi$	9,81106	9,81106	9,81106	9,81106	9,81106	9,81106
$\log w$	2,65432	2,62979	2,60097	2,58600	2,57589	2,56820
w	451,2	426,4	399,0	385,5	376,6	370,0
$R + y$	6374	6374,4	6374,8	6375,1	6375,3	6375,4
$\log R + y$	3,80441	3,80444	3,80447	3,80449	3,80450	3,80451
$\log R + y_m$[2]	3,80446	3,80446	3,80446	3,80446	3,80446	3,80446
$\log \frac{R + y_m}{R + y}$	0,00005	0,00002	9,99999	9,99997	9,99996	9,99995
$\log \left(\frac{R + y_m}{R + y}\right)^2$	**0,00010**	**0,00004**	**9,99998**	**9,99994**	**9,99992**	**9,99990**
δ_y	0,774	0,738	0,697	0,675	0,659	0,6465
$\log \delta_{ym}$[3]	9,85095	9,85095	9,85095	9,85095	9,85095	9,85095
$\log \delta_y$	9,88874	9,86806	9,84323	9,82930	9,81389	9,81057
$\log \frac{\delta_{ym}}{\delta_y}$	**9,96221**	**9,98289**	**0,00772**	**0,02165**	**0,03206**	**0,04038**
k_{1y}	0,843	0,810	0,770	0,751	0,737	0,729
$\log k_{1y}$	9,92583	9,90849	9,88649	9,87564	9,86747	9,86273
$\log k_{1m}$[4]	9,89597	9,89597	9,89597	9,89597	9,89597	9,89597
$\log \frac{k_{1y}}{k_{1m}}$	**0,02986**	**0,01252**	**9,99052**	**9,97967**	**9,97150**	**9,96676**
$273 + t_y$	263,25	260,95	258,45	257,15	256,25	255,5
$\log 283$	2,45179	2,45179	2,45179	2,45179	2,45179	2,45179
$\log 273 + t_y$	2,42037	2 41655	2,41237	2,41018	2,40866	2,40739
$\log \frac{283}{273 + t_y}$	0,03142	0,03524	0,03942	0,04161	0,04313	0,04440
$\log \frac{s_0}{s_y}$	0,01571	0,01762	0,01971	0,02081	0,02157	0,02220
$\log v$	2,63524	2,60122	2,55890	2,53543	2,51851	2,50521
$\log v \frac{s_0}{s_y}$	2,65095	2,61884	2,57861	2,55624	2,54008	2,52741
$v \frac{s_0}{s_y}$	447,7	415,8	379,0	360,0	346,8	336,8
$K\left(v \frac{s_0}{s_y}\right)$	971	992	990	963	908	827
$K(w)$	970	988	996	993	988	981
$\log K(w)$	2,98677	2,99476	2,99826	2,99695	2,99476	2,99167
$\log K\left(v \frac{s_0}{s_y}\right)$	2,98722	2,99651	2,99564	2,98363	2,95809	2,91751
$\log \Sigma = \{$ $\log \frac{K\left(v \frac{s_0}{s_y}\right)}{K(w)}$	**9,99955**	**9,99825**	**0,00262**	**0,01332**	**0,03667**	**0,07416**
$\log \frac{k_{1y}}{k_{1m}}$	0,02986	0,01252	9,99052	9,97967	9,97150	9,96676
$\log \frac{\delta_{ym}}{\delta_y}$	9,96221	9,98289	0,00772	0,02165	0,03206	0,04038
$\log\left(\frac{R + y_m}{R + y}\right)^2$	0,00010	0,00004	9,99998	9,99994	9,99992	9,99990
$\log \Sigma = \log (a_1 - b_1 w)$	9,99172	9,99370	0,00084	0,01458	0,04015	0,08120
$\log \cos \vartheta$	9,81106	9,82055	9,83405	9,84255	9,84936	9,85497
$\log (a - b w)$	9,80278	9,81425	9,83489	9,85713	9,88951	9,93617
$(a_1 - b_1 w)$	**0,9811**	**0,9856**	**1,002**	**1,0342**	**1,0968**	**1,2056**
$(a - b w)$	**0,6350**	**0,6520**	**0,6837**	**0,7197**	**0,7754**	**0,8633**

Es ist

[1] Aus der vorigen Rechnung entnommen.

[2] $R + y_m = 6374{,}7$.

[3] $\delta_{ym} = 0{,}7095$.

[4] $k_{1\,m} = 0{,}787$.

Genauere Berechnung von ϑ als Funktion von

1. $\xi(\vartheta)$ mit

w	451,2		426,4		399,0	
$\log c'_{ym}$	0,48843					
$\log \frac{s_0^2}{s_m^2}$	0,03816					
$\log c'_{ym} \cdot \frac{s_0^2}{s_m^2}$	0,52659					
$\log \cos^2 \varphi$	0,62212					
$\log c'_{ym} \cdot \frac{\left(\frac{s_0}{s_m}\right)^2}{\cos^2 \varphi}$	0,90447	0,90447				
$\log 0{,}5$	9,69897					
$\log \frac{g_{ym}}{9{,}8047}$ bzw. $\log g_{ym}$	9,99936	0,99080				
$\log a_1$ bzw. $\log b_1$	0,21793	7,19217				
$\log A_1'$ [1]) bzw. $\log B_1'$ [1])	0,82073	9,08744	0,82073	9,08744	0,82073	9,08744
$\log [J(w_e) - J(w_0)]$ [2]) bzw. $[T(w_e) - T(w_0)]$ [2])	[2]) Siehe unten.		8,23160	9,58100	8,60578	9,93997
$\log A'$ bzw. $\log B'$			9,05233	8,66844	9,42651	9,02741
A' bzw. B'			0,11281	0,04661	0,26700	0,10652
$A' - B'$			0,06620		0,16048	
$\xi(\varphi)$			1,41068		1,41068	
$\xi(\vartheta)$			1,34448		1,25020	
ϑ			48° 36,2′		46° 58,0′	

2. ϑ mit

$\log\left(c'_{ym} \frac{J_0^2}{s_m^2 \cos^2 \varphi}\right) \cdot \frac{g_{ym}}{9{,}8047}$ bzw. g_{ym}	0,60280	1,89527				
$\log a$ [3]) bzw. $\log b$ [3])	0,15782	7,26312				
$\log A_1$ [1]) bzw. $\log B_1$ [1])	0,76062	9,15839	0,76062	9,15839	0,76062	9,15839
$\log [J(w_e) - J(w_0)]$ bzw. $[T(w_e) - T(w_0)]$			8,23160	9,58100	8,60578	9,93997
$\log A$ bzw. $\log B$			8,99222	8,73939	9,36640	9,09836
A bzw. B			0,09822	0,05487	0,23249	0,12542
$A - B$			0,04335		0,10707	
$\operatorname{tg} \varphi$			1,17777		1,17777	
$\operatorname{tg} \vartheta$			1,13442		1,07070	
ϑ			48° 36,2′		46° 57,3′	
$\log w$			2,62982		2,60097	
$\log \cos \varphi$			9,81106		9,81106	
$\log w \cos \varphi$			2,44088		2,41203	
$\log \cos \vartheta$			9,82041		9,83405	
$\log \frac{s_0}{s}$			0,01908		0,01908	
$\log \frac{s_0}{s} \cos \vartheta$			9,83949		9,85313	
$\log \frac{w \cos \varphi}{\cos \vartheta} \frac{s_0}{s} = \log v$			2,60139		2,55890	
v			399,4		362,2	
$J(w_e)$ bzw. $T(w_e)$			0,255898	6,52980	0,279197	7,01962
$J(w_0)$ bzw. $T(w_0)$			0,238853	6,14873	0,238853	6,14873
$J(w_e) - J(w_0)$ bzw. $T(w_e) - T(w_0)$			0,017045	0,38107	0,040344	0,87089

w mit $\xi(\vartheta)$ also $(a_1 - b_1 w)$ und mit tg ϑ also $(a - b w)$.

$(a_1 - b_1 w)$.

385,5		376,6		370,0	
0,82073	9,08744	0,82073	9,08744	0,82073	9,08744
8,73406	0,06023	8,80920	0,12935	8,86181	0,17722
9,55479	9,14767	9,62993	9,21679	9,68254	9,26466
0,35875	0,14050	0,42651	0,16474	0,48143	0,18393
0,21825		0,26177		0,29750	
1,41068		1,41068		1,41068	
1,19243		1,14891		1,11318	
45° 53,0′		45° 1,3′		44° 17,1′	

$(a - b w)$[3].

0,76062	9,15839	0,76062	9,15839	0,76062	9,15839
8,73406	0,06023	8,80920	0,12935	8,86181	0,17722
9,49468	9,21862	9,56982	9,28774	9,62243	9,33561
0,31238	0,16543	0,37138	0,19397	0,41921	0,21658
0,14695		0,17741		0,20263	
1,17777		1,17777		1,17777	
1,03082		1,00036		0,97514	
45° 52,2′		45° 0,6′		44° 16,7′	
2,58602		2,57588		2,56820	
9,81106		9,81106		9,81106	
2,39708		2,38694		2,37926	
9,84269		9,84936		9,85485	
0,01908		0,01908		0,01908	
9,06177		9,86844		9,87393	
2,53531		2,51850		2,50533	
343,0		330,0		320,1	
0,293060	7,29750	0,303300	7,49567	0,311600	7,65264
0,238853	6,14873	0,238853	6,44873	0,238853	6,14873
0,054207	1,14877	0,064447	1,34694	0,072747	1,50391

[1]) Zur Abkürzung ist gesetzt:

1. $\frac{1}{2} c_{y\,m}'' \frac{s_0^2}{s_m^2} \cos^2\varphi \cdot \frac{g_{y\,m}}{9{,}8047} \cdot a = A_1$ — $A_1 [J(w) - J(w_0)] = A$
2. $\frac{1}{2} c_{y\,m}'' \frac{s_0^2}{s_m^2} \cos^2\varphi \cdot \frac{g_{y\,m}}{9{,}8047} \cdot a_1 = A_1'$ — $A_1' [J(w) - J(w_0)] = A'$
3. $c_{y\,m}'' \cdot \frac{s_0^2}{s_m^2} \cos^2\varphi \cdot g_{y\,m} \cdot b = B_1$ — $B_1 [T(w) - T(w_0)] = B$
4. $c_{y\,m}'' \cdot \frac{s_0^2}{s_m^2} \cos^2\varphi \cdot g_{y\,m} \cdot b_1 = B_1'$ — $B_1' [T(w) - T(w_0)] = B'$

[3]) Für $(a - b \cdot w)$ finden wir in der gleichen Weise wie oben mit Hilfe der Simpsonschen Regel

$J_1 = 55{,}6256$
$J_3 = 22758{,}0$
also $a = 1{,}4382$
$\log b = 7{,}26312 - 10$

angenäherten Ermittelung von ϑ als Funktion von w viel unabhängiger wird, da ϑ nur noch in der relativ wenig veränderlichen Funktion $K\left(v\frac{s_0}{s_y}\right)$ vorkommt.

Die hier dargelegte Annäherung haben wir zur Genauigkeitsprüfung auf die 3. Stufe angewendet, in welcher β sehr stark veränderlich ist (siehe S. 259).

(Die andere Prüfung, die nachweist, daß ein krummliniger Verlauf von $\beta = \psi(w)$ nahezu die gleichen Resultate ergibt, wie die enge Stufenteilung mit linearem Verlauf von β, haben wir ja oben schon durchgeführt.)

Es wird über v als Abszisse y und ϑ als Ordinate aufgetragen und abgelesen und hieraus w berechnet.

Wenn man $(a - b\,w)$ und $(a_1 - b_1 w)$ über w aufträgt, zeigt sich, daß $(a - b\,w)$ in unserem Falle weniger von der Geraden abweicht als $(a_1 - b_1 w)$.

Wir führen die Kontrollrechnung trotzdem mit beiden Kurven durch, um den Rechengang mit $\xi(\vartheta)$ zu zeigen.

Für $a_1 - b_1 w$ arbeiten wir mit dem Integraphen und tragen über $\psi = 0{,}98$ als Abszissenachse $\psi - 0{,}98$ etwa im Maßstab $0{,}1 = 10$ cm und als Abszissenstab für w: je 10 m Geschwindigkeit = 4 cm, die Kurve $(a_1 - b_1 w)$ als Funktion von w, links mit $w = 370$ m/sec beginnend auf und integrieren sie zweimal.

Wir finden $J_1 = 2{,}66$ und $J_2 = 178$. Hiermit wird $\log b_1 = \overline{7},19573 - 10$ und $a_1 = 0{,}6770$ gefunden. Damit ergibt sich $a_1 - b_1\,370 = \psi(370) - 0{,}98 = 0{,}0963$, d. h. $\psi(370) \sim 1{,}0763$ und ebenso $\psi(451{,}2) \sim 0{,}98 - 0{,}0311 = 0{,}9489$. (Man muß zur Kontrolle der Integration mit dem Integraphen nachsehen, ob J_1 den Flächeninhalt der Differentialkurve richtig wiedergibt[10].)

Schluß-Kontrollrechnung für die Stufe 3:

Es wird nach obigem bei $g_0 = 9{,}8047$ aus der Hauptrechnung entnommen:

für v	=	431,8	399,2	362,2	343,1	330,0	320,0
$\log R^2$	=	7,60828	7,60828	7,60828	7,60828	7,60828	7,60828
$\log (R+y)^2$	=	7,60882	7,60888	7,60894	7,60898	7,60900	7,60902
$\log \frac{(R+y)^2}{R^2}$	=	54	60	66	70	72	74
$\log g_0$	=	0,99143	0,99143	0,99143	0,99143	0,99143	0,99143
$\log \frac{g_0 R^2}{(R+y)^2}$	=	0,99089	0,99083	0,99077	0,99073	0,99071	0,99069
$\log \frac{P \cdot 1{,}206}{1000\, d^2 \cdot i}$	=	0,44341	0,44341	0,44341	0,44341	0,44341	0,44341
$\log \frac{g_0 R^2}{(R+y)^2} \cdot \frac{P \cdot 1.206}{1000\, d^2\, i}$	=	1,43430	1,43424	1,43418	1,43414	1,43412	1,43410
$\log \delta_y$	=	9,88874	9,86806	9,84323	9,82930	9,81889	9,81051
$\log \frac{g_0 R^2}{(R+y)^2} \cdot \frac{P}{1000\, d^2 i} \cdot \frac{1.206}{\delta_y}$	=	1,54556	1,56618	1,59095	1,60484	1,61523	1,62353
$\log v$	=	2,63524	2,60122	2,55890	2,53543	2,51851	2,50521
$\log \cos \vartheta$	=	9,81106	9,82055	9,83405	9,84255	9,84936	9,85497
$\log v \cos \vartheta$	=	2,44630	2,42177	2,39295	2,37798	2,36737	2,36018
$\log (v \cos \vartheta)^3$	=	7,33890	7,26531	7,17885	7,13394	7,10361	7,08054
$\log K\left(\frac{v\, s_0}{s}\right)$	=	2,98722	2,99651	2,99564	2,98363	2,95809	2,91751
log Verhältnisfaktor[11]) $= \log m_2$	=	3,62323—10	3,62323—10	3,62323—10	3,62323—10	3,62323—10	3,62323—10
$\log (v \cos \vartheta)^3\, K\left(\frac{v\, s_0}{s}\right) \cdot m_2$	=	3,94935	3,88505	3,79772	3,74079	3,68493	3,62128
log Integrand	=	7,59621—10	7,68113—10	7,79323	7,86400	7,93030	8,00225
Integrand	=	0,0039465	47988	62120	73122	85172	0,010052
$v \cos \vartheta$	=	279,45	264,1	247,14	238,77	233,28	229,18

[10]) Fortsetzung des Textes auf Seite 269.

[11]) Der Maßstab der von uns dargestellten Siacci $K S\left(\frac{v\, s_0}{s}\right)$-Kurve muß im Verhältnis $m_2 = \frac{349}{10^6\; 381}$ verkleinert werden, um den richtigen $K\left(\frac{v s_0}{s}\right)$-Wert zu finden.

Noch Anlage 1: Durchführung der Hauptrechnung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
v	879,7			625,6			431,8	3. Stufe		320,0	
φ	54° 31′			53° 1′			49° 40′			44° 16′	
y	2000			2000			1100	1395	1419	977,5	
y_m der Stufe	1000	1. Stufe		3000	2. Stufe		4550	4698	4710	5911	Stu
δy_m } aus Anlage 3	1,091			0,870			0,723	0,710	0,7095	0,607	
$273 + ty_m$ } aus Anlage 3	279,3			269,75			260,0	259,2	259,2	253,15	
$\log 283$	2,45179			2,45179			2,45179	2,45179	2,45179	2,45179	
$-\log(273 + ty_m)$	2,44607			2,43096			2,41497	2,41363	2,41363	2,40338	
$\log \frac{283}{273 + ty_m} = \log \frac{s_0^2}{s^2}$	**0,00572**			**0,02083**			**0,03682**	**0,03816**	**0,03816**	**0,04841**	
$\log \frac{s_0}{s}$	**0,00286**			**0,01042**			**0,01841**	**0,01908**	**0,01908**	**0,02420**	
$+\log v$	2,94433			2,79627			2,63529	2,63529	2,63529	2,50521	
$\log\left(v \cdot \frac{s_0}{s}\right) = \log w_0$	2,94719			2,80669			2,65370	2,65437	2,65437	2,52941	
w_0	885,5		885,5	640,8		640,8	450,5	451,2	451,2	338,4	
w_e (anfangs geschätzt, dann berechnet)	600		651,8	450		475,6	370	370,0	370	315,0	
$w_0 + w_e$ (berechnet)			1537,3			1116,4	820,5	821,2	821,2		
$\frac{w_0 + w_e}{2} = w_m$			768,7			558,2	410,25	410,6	410,6		
ϑ_e (geschätzt bzw. berechnet)	53°		53° 1′	50°		49° 40′	46°	44° 24′	44° 17′	36°	
k_1 aus Abb. 4	1,001		1,0055	0,936		0,943	0,787	0,787	0,787	0,797	
$\log 1{,}206$	0,08135			0,08135			0,08135	0,08135	0,08135	0,08135	
$-\log \delta y_m$	0,03782			9,93952			9,85914	9,85126	9,85095	9,78319	
$\log \frac{1{,}206}{c' y_m}$	0,04353		0,04353	0,14183		0,14183	0,22221	0,23009	0,23040	0,29816	
$+\log c_0'$	0,36206		0,36206	0,36206		0,36206	0,36206	0,36206	0,36206	0,36206	
$+\log k_1$	0,00043		0,00239	9,97128		9,97451	9,89597	9,89597	9,89597	9,90146	
$\log c_0' \cdot k_1 \cdot \frac{1{,}206}{\delta y_m} = \log c''_y$	0,40602		0,40798	0,47517		0,47840	0,48024	0,48812	0,48843	0,56168	
$-\log \beta$ aus Sonderrechnung Anl. 2	0,23223		0,23251	0,21085		0,21381	0,15512	0,15827	0,15715	0,05805	
$\log \frac{c''_y}{\beta} = \log c'_y$	**0,17379**	**0,17379**	**0,17547**	**0,26432**	**0,26432**	**0,26459**	**0,32512**	**0,32985**	**0,33128**	**0,50363**	**0,5**
$\log 2 \cos^2 \varphi$	9,82859		9,82859	9,85963		9,85963	9,92315	9,92315	9,92315	0,01097	
x (geschätzt)	1450	1461	**1461**	1600	1589	**1587**			**1314**	1150	1
$\log x$	3,16137	3,16465	3,16465	3,20412	3,20112	3,20058	3,10910	3,11724	3,11847	3,06070	3,0
$\log \frac{x}{c'_y}$	2,98758	2,99086	2,98918	2,93980	2,93680	2,93599	2,78398	2,78739	2,78719	2,55707	2,5
$\frac{x}{c'_y}$	**971,8**	**979,2**	**975,4**	**870,6**	**864,6**	**863,0**	**608,1**	612,9	**612,6**	**360,6**	**3**
f	0,014933	0,015071	0,01500	0,02563	0,025417	0,02536	0,033842	0,034052	0,034033	0,032761	0,0
$\log \frac{c'_y}{2 \cos^2 \varphi}$	0,34520	0,34520	0,34688	0,40469	0,40469	0,40496	0,40197	0,40670	0,40813	0,49266	0,4
$+\log \frac{s_0^2}{s^2}$ (siehe oben)	0,00572	0,00572	0,00572	0,02083	0,02083	0,02083	0,03682	0,03816	0,03816	0,04841	0,0
$+\log \frac{g_y}{9{,}8047}$ (Nebenrechnung)	9,99986	9,99986	9,99986	9,99960	9,99960	9,99960	9,99936	9,99936	9,99936	9,99920	9,9
$+\log f$	8,17415	8,17814	8,17609	8,40875	8,40513	8,40415	8,52946	8,53214	8,53190	8,51535	8,5
$+\log x$ (siehe oben)	3,16137	3,16465	3,16465	3,20412	3,20112	3,20058	3,10910	3,11724	3,11847	3,06070	3,0
$\log\left(\frac{c_y'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9{,}8047} \cdot f \cdot x\right)$	1,68630	1,69357	1,69320	2,03799	2,03137	2,03012	2,07677	2,09360	2,09602	2,11632	2,1
Num. log "	— 48,6	— 49,4	49,3	109,1	107,5	107,2	119,3	124,1	124,8	130,7	1
$\log \operatorname{tg} \varphi$	0,14700	0,14700		0,12308	0,12308	0,12308	0,07111	0,07111	0,07111	9,98892	9,9
$\log x \operatorname{tg} \varphi$	3,30837	3,31165		3,32720	3,32420	3,32366	3,18021	3,18835	3,18958	3,04962	3,0
$x \operatorname{tg} \varphi$	2034,1	2049,5	2049,5	2124,2	2109,6	2107,0	1514,3	1542,9	1547,3	1121,0	11
$y = x \operatorname{tg} \varphi \mp$	1985,5	2000,1	**2000,2**	2015,1	2002,1	**2000**	1395,0	1418,8	**1422,5**	990,3	9
f_4		0,03356	0,03339		0,056412	0,056275	0,072344	0,07284	0,072795		0,0
$\log f_4$		8,52582	8,52362		8,75137	8,75031	8,85940	8,86237	8,86210		8,8
$+\log \left(\frac{c'_y}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9{,}8047}\right)$		**0,35078**	0,35246		**0,42512**	0,42539	**0,43818**	**0,44422**	0,44565		**0,5**
$\log [f_4 \cdot ($ " $)]$		8,87660	8,87608		9,17649	9,17570	9,29758	9,30659	9,30775		9,3
Num. log "		0,07527	0,07518		0,15014	0,14987	0,19842	0,20258	0,20312		0,2
$\operatorname{tg} \varphi$		1,40281	1,40281		1,32763	1,32763	1,17794[1])	1,17794	0,17794		0,9
$\operatorname{tg} \varphi \mp$ Num. log $= \operatorname{tg} \vartheta_e$		1,32754	1,32763		1,17749	1,17776	0,97952	0,97536	0,97482		0,7
ϑ_e		53° 1′	**53° 1′**		49° 40′	**49° 40′**	44° 24′	44° 17′	44° 16′		3
w_e		651,8	652,6		475,6	475,85	370	370	370		3
$\log w_e$			2,81465			2,67747			2,56820		
$+\log \cos \varphi$			9,76378			9,77930			9,81106		
$\log (w_e \cdot \cos \varphi)$			2,57843			2,45677			2,37926		
$\log \cos \vartheta_e$			9,77930			9,81106			9,85497		
$+\log \frac{s_0}{s}$ (siehe oben)			0,00286			0,01042			0,01908		
$-\log\left(\frac{s_0}{s} \cos \vartheta_e\right)$			9,78216			9,82148			9,87405		
[illegible]			[illegible]			[illegible]			2,50521		

10	11	12	13	14	15	16	17	18	25	26	51	52	53	54
320,0			320,0			286,7			206,3		258,8			
44° 16′			44° 16′			40° 23′			15° 14′		60° 33′			
977,5			577,5			600			145		2000			
5911	**Stufe 4a**		5712	**4. Stufe**		6300	**5. Stufe**		7547	**8. Stufe**		**15. Stufe**		
0,607			0,6225			0,5762			0,4837					
253,15			254,15			251,35			245,75					
2,45179			2,45179			2,45179			2,45179					
2,40338			2,40509			2,40028			2,39050					
0,04841			**0,04670**			**0,05151**			**0,06129**		**0,02083**			
0,02420			**0,02335**			**0,02576**			**0,03065**		**0,01042**			
2,50521			2,50521			2,45741			2,31443		2,41292			
2,52941			2,52856			2,48317			2,34508		2,42334			
338,4		338,4	337,7		337,7	304,2	304,2	304,2	221,4	221,4	265,1			265,1
315,0		312,2	320		321,15	290		293,3	215	214,7	210			212,2
		650,6			658,85			597,5		436,1				477,3
		325,3			329,4			298,75		218,05				238,65
36°		36° 39′	40°		40° 22′	34°		34° 23′	0		68°			68° 11′
0,797		0,797	0,780		0,780	0,922		0,926	0,767		0,792			0,795
0,08135			0,08135			0,08135			0,08135					
9,78319			9,79414			9,76057			9,68458					
0,29816		0,29816	0,28721			0,32078		0,32078	0,39677		0,14183			0,14183
0,36206		0,36206	0,36206			0,36206		0,36206	0,36206		0,06528			0,06528
9,90146		9,90146	9,89209			9,96473		9,96661	9,88480		9,89873			9,90037
0,56168		0,56168	0,54136		0,54136	0,64757		0,64945	0,64363	0,64363	0,10584			0,10748
0,05805		0,01174	0,06930		0,05119	0,09085		0,07475	0,00783	0,00553	0,37394			0,36831
0,50363	**0,50363**	**0,54994**	**0,47206**	**0,47206**	**0,49017**	**0,55672**	**0,55672**	**0,57470**	**0,63580**	**0,63810**	**9,73190**	**9,73190**	**9,73190**	**9,73917**
0,01097		0,01097	0,01097		0,01097	0,06463		0,06463	0,26997	0,26997	9,68437			9,68437
1150	1135	**1135**	600	633	**632**	800	780	**780**		**1068**	1000	900	949,5	**949,3**
3,06070	3,05500	3,05500	2,77815	2,80140	2,80072	2,90309	2,89209	2,89209	3,02859	3,02868	3,00000	2,95424	2,97749	2,97740
2,55707	2,55137	2,50506	2,30609	2,32934	2,31055	2,34637	2,33537	2,31739	2,39279	2,39058	3,26810	3,22234	3,24559	3,23823
360,6	**355,9**	**319,9**	**202,3**	**213,5**	**204,4**	**222,0**	**216,5**	**207,7**	**247,05**	**245,8**	**1854,0**	**1668,5**	**1760,3**	**1730,7**
0,032761	0,03231	0,02887	0,01799	0,019032	0,018186	0,02416	0,023541	0,022552	0,05052	0,05026	0,3053	0,2701	0,2873	0,28175
0,49266	0,49266	0,53897	0,46109		0,47920	0,49209	0,49209	0,51007	0,36583	0,36813	0,04753			0,05480
0,04841	0,04841	0,04841	0,04670	0,50701	0,04670	0,05151	0,05151	0,05151	0,06129	0,06129	0,02083	0,06796	0,06796	0,02083
9,99920	9,99920	9,99920	9,99922		9,99922	9,99914	9,99914	9,99914	9,99897	9,99897	9,99960			9,99960
8,51535	8,50934	8,46045	8,25503	8,27945	8,25973	8,38310	8,37183	8,35319	8,70346	8,70122	9,48473	9,43152	9,45834	9,44987
3,06070	3,05500	3,05500	2,77815	2,80140	2,80072	2,90309	2,89209	2,89209	3,02859	3,02868	3,00000	2,95424	2,97749	2,97740
2,11632	2,10461	2,10203	1,54019	1,58786	1,58557	1,82893	1,80666	1,80598	2,15814	2,15829	2,55269	2,45372	2,50379	2,50250
130,7	127,2	126,5	34,7	38,7	38,5	67,4	64,1	64,0	143,9	144,0	357,0	284,3	319,0	318,1
9,98892	9,98892		9,98892	9,98892	9,98892	9,92982	9,92982		9,43531	9,43531	0,24839	0,24839	0,24839	0,24839
3,04962	3,04392		2,76707	2,79032	2,78964	2,83291	2,82191		2,46390	2,46399	3,24839	3,20263	3,22588	3,22579
1121,0	1106,4	1106,4	584,9	617,0	616,1	680,6	663,6	663,6	291,0	291,1	1771,7	1594,5	1682,2	1681,9
990,3	979,2	**979,9**	550,2	578,3	**577,6**	613,2	599,5	**599,6**	147,1	**147,1**	2128,7	1878,8	2001,2	**2000,0**
	0,06649	0,05927		0,03877	0,03701		0,04773	0,04569	0,10214	0,10161			0,6207	0,60782
	8,82276	8,77283		8,58850	8,56832		8,67879	8,65982	9,00922	9,00692			9,79288	9,78377
	0,54027	0,58658		**0,50701**	0,52512		**0,54274**	0,56072	**0,42609**	0,42839			**0,06796**	0,07523
	9,36303	9,35941		9,09551	9,09344		9,22153	9,22054	9,43531	9,43531			9,86084	9,85900
	0,23069	0,22877		0,12460	0,12401		0,16655	0,16617	0,27246	0,27246			0,7258	0,7228
	0,97482	0,97482		0,97482	0,97482		0,85081	0,85081	0,27246	0,27246			1,7717	1,7717
	0,74413	0,74605		0,85022	0,85081		0,68426	0,68464	0	0			2,4975	2,4945
	36° 39′	36° 43′		40° 22′	40° 23′		34° 23′	**34° 24′**	0	**0**			68° 11′	**68° 9′**
	312,2			321,15	321,8		293,3	293,7	214,7	214,75			212,2	213,0
					2,50759			2,46790		2,33193				2,32838
					9,85497			9,88180		9,98447				9,69167
					2,36256			2,34970		2,31640				2,02005
					9,88180			**9,91651**		0,00000				9,57075
					0,02335			0,02576		0,03065				0,01042
					9,90515			9,94227		0,03065				9,58117
					[illegible]			[illegible]		[illegible]				2,43888

$\frac{w_0 + w_e}{2} = w_m$			768,7			558,2	410,25	410,6	410,6		
ϑ_e (geschätzt bzw. berechnet)	53°		53° 1′	50°		49° 40′	46°	44° 24′	44° 17′	36°	
k_1 aus Abb. 4	1,001		1,0055	0,936		0,943	0,787	0,787	0,787	0,797	
log 1,206	0,08135			0,08135			0,08135	0,08135	0,08135	0,08135	
$-\log \delta y_m$	0,03782			9,93952			9,85914	9,85126	9,85095	9,78319	
$\log \frac{1,206}{c'y_m}$	0,04353		0,04353	0,14183		0,14183	0,22221	0,23009	0,23040	0,29816	
$+\log c_0'$	0,36206		0,36206	0,36206		0,36206	0,36206	0,36206	0,36206	0,36206	
$+\log k_1$	0,00043		0,00239	9,97128		9,97451	9,89597	9,89597	9,89597	9,90146	
$\log c_0' \cdot k_1 \cdot \frac{1,206}{\delta y_m} = \log c''_y$	0,40602		0,40798	0,47517		0,47840	0,48024	0,48812	0,48843	0,56168	
$-\log \beta$ aus Sonderrechnung Anl. 2	0,23223		0,23251	0,21085		0,21381	0,15512	0,15827	0,15715	0,05805	
$\log \frac{c''_y}{\beta} = \log c'_y$	**0,17379**	**0,17379**	**0,17547**	**0,26432**	**0,26432**	**0,26459**	**0,32512**	**0,32985**	**0,33128**	**0,50363**	**0,50363**
$\log 2 \cos^2 \varphi$	9,82859		9,82859	9,85963		9,85963	9,92315	9,92315	9,92315	0,01097	
x (geschätzt)	1450	1461	**1461**	1600	1589	**1587**			**1314**	1150	1135
$\log x$	3,16137	3,16465	3,16465	3,20412	3,20112	3,20058	3,10910	3,11724	3,11847	3,06070	3,05500
$\log \frac{x}{c'_y}$	2,98758	2,99086	2,98918	2,93980	2,93680	2,93599	2,78398	2,78739	2,78719	2,55707	2,55137
$\frac{x}{c'_y}$	**971,8**	**979,2**	**975,4**	**870,6**	**864,6**	**863,0**	**608,1**	**612,9**	**612,6**	**360,6**	**355,9**
f	0,014933	0,015071	0,01500	0,02563	0,025417	0,02536	0,033842	0,034052	0,034033	0,032761	0,03231
$\log \frac{c'_y}{2 \cos^2 \varphi}$	0,34520	0,34520	0,34688	0,40469	0,40469	0,40496	0,40197	0,40670	0,40813	0,49266	0,49266
$+\log \frac{s_0^2}{s^2}$ (siehe oben)	0,00572	0,00572	0,00572	0,02083	0,02083	0,02083	0,03682	0,03816	0,03816	0,04841	0,04841
$+\log \frac{g_y}{9,8047}$ (Nebenrechnung)	9,99986	9,99986	9,99986	9,99960	9,99960	9,99960	9,99936	9,99936	9,99936	9,99920	9,99920
$+\log f$	8,17415	8,17814	8,17609	8,40875	8,40513	8,40415	8,52946	8,53214	8,53190	8,51535	8,50934
$+\log x$ (siehe oben)	3,16137	3,16465	3,16465	3,20412	3,20112	3,20058	3,10910	3,11724	3,11847	3,06070	3,05500
$\log \left(\frac{c_y'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9,8047} \cdot f \cdot x\right)$	1,68630	1,69357	1,69320	2,03799	2,03137	2,03012	2,07677	2,09360	2,09602	2,11632	2,10461
Num. log "	−48,6	−49,4	49,3	109,1	107,5	107,2	119,3	124,1	124,8	130,7	127,2
$\log \operatorname{tg} \varphi$	0,14700	0,14700		0,12308	0,12308	0,12308	0,07111	0,07111	0,07111	9,98892	9,98892
$\log x \operatorname{tg} \varphi$	3,30837	3,31165		3,32720	3,32420	3,32366	3,18021	3,18835	3,18958	3,04962	3,04392
$x \operatorname{tg} \varphi$	2034,1	2049,5	2049,5	2124,2	2109,6	2107,0	1514,3	1542,9	1547,3	1121,0	1106,4
$y = x \operatorname{tg} \varphi \mp$	1985,5	2000,1	**2000,2**	2015,1	2002,1	**2000**	1395,0	1418,8	**1422,5**	990,3	979,2
f_4		0,03356	0,03339		0,056412	0,056275	0,072344	0,07284	0,072795		0,06649
$\log f_4$		8,52582	8,52362		8,75137	8,75031	8,85940	8,86237	8,86210		8,82276
$+\log \left(\frac{c'_y}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9,8047}\right)$		**0,35078**	0,35246		**0,42512**	0,42539	**0,43818**	**0,44422**	0,44565		**0,54027**
$\log [f_4 \cdot ($ " $)]$		8,87660	8,87608		9,17649	9,17570	9,29758	9,30659	9,30775		9,36303
Num. log "		0,07527	0,07518		0,15014	0,14987	0,19842	0,20258	0,20312		0,23069
$\operatorname{tg} \varphi$		1,40281	1,40281		1,32763	1,32763	1,17794[1])	1,17794	0,17794		0,97482
$\operatorname{tg} \varphi \mp$ Num. log $= \operatorname{tg} \vartheta_e$		1,32754	1,32763		1,17749	1,17776	0,97952	0,97536	0,97482		0,74413
ϑ_e		53° 1′	**53° 1′**		49° 40′	**49° 40′**	44° 24′	44° 17′	44° 16′		36° 39
w_e		651,8	652,6		475,6	475,85	370	370	370		312,2
$\log w_e$			2,81465			2,67747			2,56820		
$+\log \cos \varphi$			9,76378			9,77930			9,81106		
$\log (w_e \cdot \cos \varphi)$			2,57843			2,45677			2,37926		
$\log \cos \vartheta_e$			9,77930			9,81106			9,85497		
$+\log \frac{s_0}{s}$ (siehe oben)			0,00286			0,01042			0,01908		
$-\log \left(\frac{s_0}{s} \cos \vartheta_e\right)$			9,78216			9,82148			9,87405		
$\log \frac{w_e \cdot \cos \varphi}{\frac{s_0}{s} \cdot \cos \vartheta_e} = \log v_e$			2,79627			2,63529			2,50521		
v_e			**625,6**			**431,8**			**320,0**		
$\frac{x_m}{c'_y}$		470,1			403,3		279,2	281,3			165,8
$f_{4(m)}$		0,01357			0,022158		0,02977	0,02992			0,02971
$\log f_{4(m)}$		8,13258			8,34553		8,47378	8,47596			8,47290
$+\log \left(\frac{c'_y}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot \frac{g_y}{9,8047}\right)$ (siehe oben)		0,35078			0,42512		0,43818	0,44422			0,54027
$\log [f_{4(m)} \cdot ($ " $)]$		8,48336			8,77065		8,91196	8,92018			9,0131
Num. log "		0,03043			0,05897		0,08165	0,08321			0,10308
$\operatorname{tg} \varphi$		1,40281			1,32763		1,17794	1,17794			0,97482
$\operatorname{tg} \varphi \mp$ Num. log $= \operatorname{tg} \vartheta_m$		1,37238			1,26866		1,09629	1,09473			0,8717
ϑ_m		53° 55′			51° 45′		47° 38′	47° 35′			41° 5′
f_3			1,282			1,5702			1,5004		
$\log f_3$			0,10789			0,19596			0,17621		
$+\log c'_y$ (siehe oben)			0,17547			0,26459			0,33128		
$+\log \frac{s_0}{s}$ (siehe oben)			0,00286			0,01042			0,01908		
$\log \left(f_3 \cdot c'_y \cdot \frac{s_0}{s}\right)$			0,28622			0,47097			0,52657		
$-\log \cos \varphi$			9,76378			9,77930			9,81106		
$\log \frac{f_3 \cdot c'_y \cdot \frac{s_0}{s}}{\cos \varphi} = \log t$			0,52244			0,69167			0,71551		
t			**3,330**			**4,917**			5,194		

[1]) Infolge eines Versehens ist die weitere Rechnung mit tg 49° 40′ = 1,17794 statt 1,17776 durchgeführt. Dies entspricht einem Fehler im Winkel von etwa 15″

		[illegible]			658,85			597,5		436,1				477,3
		325,3			329,4			298,75		218,05				238,65
36°		36° 39′	40°		40° 22′	34°		34° 23′	0		68°			68° 11′
,797		0,797	0,780		0,780	0,922		0,926	0,767		0,792			0,795
,08135			0,08135			0,08135			0,08135					
,78319			9,79414			9,76057			9,68458					
,29816		0,29816	0,28721			0,32078		0,32078	0,39677		0,14183			0,14183
,36206		0,36206	0,36206			0,36206		0,36206	0,36206		0,06528			0,06528
,90146		9,90146	9,89209			9,96473		9,96661	9,88480		9,89873			9,90037
,56168		0,56168	0,54136		0,54136	0,64757		0,64945	0,64363	0,64363	0,10584			0,10748
,05805		0,01174	0,06930		0,05119	0,09085		0,07475	0,00783	0,00553	0,37394			0,36831
,50363	**0,50363**	**0,54994**	**0,47206**	**0,47206**	**0,49017**	**0,55672**	**0,55672**	**0,57470**	**0,63580**	**0,63810**	**9,73190**	**9,73190**	**9,73190**	**9,73917**
,01097		0,01097	0,01097		0,01097	0,06463		0,06463	0,26997	0,26997	9,68437			9,68437
1150	1135	**1135**	600	633	**632**	800	780	**780**		**1068**	1000	900	949,5	**949,3**
,06070	3,05500	3,05500	2,77815	2,80140	2,80072	2,90309	2,89209	2,89209	3,02859	3,02868	3,00000	2,95424	2,97749	2,97740
,55707	2,55137	2,50506	2,30609	2,32934	2,31055	2,34637	2,33537	2,31739	2,39279	2,39058	3,26810	3,22234	3,24559	3,23823
360,6	**355,9**	**319,9**	**202,3**	**213,5**	**204,4**	**222,0**	**216,5**	**207,7**	**247,05**	**245,8**	**1854,0**	**1668,5**	**1760,3**	**1730,7**
,032761	0,03231	0,02887	0,01799	0,019032	0,018186	0,02416	0,023541	0,022552	0,05052	0,05026	0,3053	0,2701	0,2873	0,28175
,49266	0,49266	0,53897	0,46109		0,47920	0,49209	0,49209	0,51007	0,36583	0,36813	0,04753			0,05480
,04841	0,04841	0,04841	0,04670	} 0,50701	0,04670	0,05151	0,05151	0,05151	0,06129	0,06129	0,02083	} 0,06796	0,06796	0,02083
,99920	9,99920	9,99920	9,99922		9,99922	9,99914	9,99914	9,99914	9,99897	9,99897	9,99960			9,99960
,51535	8,50934	8,46045	8,25503	8,27945	8,25973	8,38310	8,37183	8,35319	8,70346	8,70122	9,48473	9,43152	9,45834	9,44987
,06070	3,05500	3,05500	2,77815	2,80140	2,80072	2,90309	2,89209	2,89209	3,02859	3,02868	3,00000	2,95424	2,97749	2,97740
,11632	2,10461	2,10203	1,54019	1,58786	1,58557	1,82893	1,80666	1,80598	2,15814	2,15829	2,55269	2,45372	2,50379	2,50250
130,7	127,2	126,5	34,7	38,7	38,5	67,4	64,1	64,0	143,9	144,0	357,0	284,3	319,0	318,1
,98892	9,98892		9,98892	9,98892	9,98892	9,92982	9,92982		9,43531	9,43531	0,24839	0,24839	0,24839	0,24839
,04962	3,04392		2,76707	2,79032	2,78964	2,83291	2,82191		2,46390	2,46399	3,24839	3,20263	3,22588	3,22579
1121,0	1106,4	1106,4	584,9	617,0	616,1	680,6	663,6	663,6	291,0	291,1	1771,7	1594,5	1682,2	1681,9
990,3	979,2	**979,9**	550,2	578,3	**577,6**	613,2	599,5	**599,6**	147,1	**147,1**	2128,7	1878,8	2001,2	**2000,0**
	0,06649	0,05927		0,03877	0,03701		0,04773	0,04569	0,10214	0,10161			0,6207	0,60782
	8,82276	8,77283		8,58850	8,56832		8,67879	8,65982	9,00922	9,00692			9,79288	9,78377
	0,54027	0,58658		**0,50701**	0,52512		**0,54274**	0,56072	**0,42609**	0,42839			**0,06796**	0,07523
	9,36303	9,35941		9,09551	9,09344		9,22153	9,22054	9,43531	9,43531			9,86084	9,85900
	0,23069	0,22877		0,12460	0,12401		0,16655	0,16617	0,27246	0,27246			0,7258	0,7228
	0,97482	0,97482		0,97482	0,97482		0,85081	0,85081	0,27246	0,27246			1,7717	1,7717
	0,74413	0,74605		0,85022	0,85081		0,68426	0,68464	0	0-			2,4975	2,4945
	36° 39′	36° 43′		40° 22′	40° 23′		34° 23′	**34° 24′**	0	**0**			68° 11′	**68° 9′**
	312,2			321,15	321,8		293,3	293,7	214,7	214,75			212,2	213,0
					2,50759			2,46790		2,33193				2,32838
					9,85497			9,88180		9,98447				9,69167
					2,36256			2,34970		2,31640				2,02005
					9,88180			**9,91651**		0,00000				9,57075
					0,02335			0,02576		0,03065				0,01042
					9,90515			9,94227		0,03065				9,58117
					2,45741			2,40743		2,28575				2,43888
					286,7			**255,5**		**193,0**				**274,7**
	165,8			102,0			103,5		120,8				820	
	0,02971			0,01800			0,02234		0,04916				0,2552	
	8,47290			8,25527			8,34908		8,69161				9,40688	
	0,54027			0,50701			0,54274		0,42609				0,06796	
	9,01317			8,76228			8,89182		9,11770				9,47484	
	0,10308			0,05785			0,07795		0,13113				0,2984	
	0,97482			0,97482			0,85081		0,27246				1,7717	
	0,87174			0,91697			0,77286		0,14133				2,0701	
	41° 5′			42° 31′			37° 42′		8° 3′				64° 13′	
					0,6187			0,6940		1,1284				7,3028
					9,79148			9,84136		0,05246				0,86349
					0,49017			0,57470		0,63810				9,73917
					0,02335			0,02576		0,03065				0,01042
					0,30500			0,44182		0,72121				0,61308
					9,85497			9,88180		9,98447				9,69167
					0,45003			0,56002		0,73674				0,92141
					2,819			**3,631**		**5,454**				**8,345**

Wenn man mit der Handhabung des Integraphen nicht genügend vertraut ist, empfiehlt es sich, die Berechnung von J_1 und J_3 nach der Simpsonschen Regel durchzuführen.

Zu diesem Zwecke teilen wir den Bereich von 451,2 bis 370 in 16 gleiche Teile und lesen die angenäherten Werte von $(a_1 - b_1 w)$ aus der graphischen Darstellung ab.

Es folgt $J_1 = 82{,}238$ und $J_3 = 33698$. Damit wird $a_1 = 1{,}6517$ und $\log b_1 = 7{,}19717 - 10$ und es wird $\psi(370) \sim 1{,}0758$, $\psi(451{,}2) = 0{,}9494$.

Mit den gefundenen Werten von a_1 und b_1 berechnen wir auf S. 266 und 267 aus der Formel für $\xi(\vartheta)\,\vartheta$.

IV. Schlußkontrolle.

Hat man nach dem oben dargelegten Hauptverfahren v als Funktion von ϑ ermittelt, so läßt sich die Hodographengleichung auch schreiben

$$\frac{d\,\vartheta}{\cos^3\vartheta} = g_0 \frac{R^2}{(R+y)^2} c_y{}^0 \frac{d\,(v\cos\vartheta)}{(v\cos\vartheta)^3\, K\left(\frac{v\,s_0}{s}\right)} \quad \text{mit } c_y{}^0 = \frac{P}{1000\,d^2\,i}\cdot\frac{1{,}206}{\delta_y}.$$

Setzt man nun $v\cos\vartheta = u$ und bildet aus der vorherigen Rechnung $v\cos\vartheta$, g_y, $c_y{}^0$ für äquidistante Werte von $v\cos\vartheta$, so läßt sich der Integrand $g_0 \dfrac{R^2\cdot c_y{}^0}{(R+y)^2\, u^3\, K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)}$ für äquidistante Werte von u bzw. w bilden, und es läßt sich

$$\xi(\vartheta) - \xi(\varphi) = \int g_y \frac{c_y{}^0\, d\,(v\cos\vartheta)}{(v\cos\vartheta)^3\, K\left(\frac{v\,s_0}{s_y}\right)}$$

mittels Quadratur bestimmen (durchgeführt für die 3. Stufe auf S. 268 und 270).

Aus den Werten auf S. 270 bilden wir $\dfrac{v^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{g_y}$ und $\dfrac{v^2}{g_y}$

$\log v$	2,63528	2,60774	2,57769	2,54429	2,52587	2,50556
$\log v^2$	5,27056	5,21548	5,15538	5,08858	5,05174	5,01112
$\log g_y$	0,99089	0,99084	0,99080	0,99075	0,99072	0,99069
$\log \frac{v^2}{g_y}$	4,27967	4,22464	4,16458	4,09783	4,06102	4,02043
$\log \mathrm{tg}\,\vartheta$	0,07106	0,05796	0,04161	0,02034	0,00682	9,98960
$\log \frac{v^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{g_y}$	4,35073	4,28260	4,20619	4,11817	4,06784	4,01003
$\frac{v^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{g_y}$	22425,0	19169,1	16076,3	13127,3	11691,0	10233,6
$\frac{v^2}{g_y}$	19040,0	16774,2	14607,1	12526,1	11508,4	10482,0

Mit diesen Werten wird mit Hilfe des Integraphen

$$-\int_{49^0\,40'}^{\vartheta_e} \frac{v^2}{g_y}\,\mathrm{tg}\,\vartheta\, d\,\vartheta = y$$

gebildet, und zwar bis zu $y = 1422{,}5$ m (der Höhe der in der Hauptrechnung gebildeten Stufe). Man findet das dazugehörige $\vartheta_e = 44^0\,14'$ und das dazugehörige $v_e = 319{,}6$, sowie mittels $-\int_{49^0\,40'}^{44^0\,14'} \frac{v^2}{g}\, d\,\vartheta = x = 1310$ m. Man sieht, daß unsere Hauptrechnung mit allen 3 Kontrollrechnungen praktisch genügend übereinstimmt.

Für $\vartheta = 49^0\,40$ ist $g_y \sim 0{,}99089$

$v \cos \vartheta$	Integrand	Faktor	Produkt
279,45	0,003947	1	0,003947
276,31	0,004101	4	0,016404
273,17	0,004262	2	0,008524
270,02	0,004222	4	0,017688
266,88	0,004618	1	0,004618
			0,051181

$$0{,}051181 \cdot \frac{50{,}27}{48} = 0{,}053604 \qquad \xi(49^0\,40') = 1{,}410681$$
$$\xi(\vartheta) = 1{,}357077\,, \quad \vartheta = 48^0\,48{,}725 \text{ bei } u = 266{,}88$$

$$\log u = 2{,}42632,\quad \log\cos\vartheta = 9{,}81858,\quad \log v = 2{,}60774\,.\quad v = 405{,}3,\quad g_y \sim 0{,}99034$$

$v \cos \vartheta$	Integrand	Faktor	Produkt
266,88	0,004618	1	0,004618
262,74	0,004821	4	0,019284
260,60	0,005039	2	0,010078
257,46	0,005271	4	0,021084
254,32	0,005528	1	0,005528
			0,060592

$$0{,}060592 \cdot \frac{50{,}27}{48} = 0{,}063548 \qquad 1{,}293619\,,\quad \vartheta = 47^0\,44',42 \text{ bei } u = 254{,}32$$

$$\log u = 2{,}40538,\quad \log\cos\vartheta = 9{,}82769,\quad 2{,}57769\,,\quad v = 378{,}2,\quad g_y \sim 0{,}99080$$

$v \cos \vartheta$	Integrand	Faktor	Produkt
254,32	0,005528	1	0,005528
251,17	0,005812	4	0,023248
248,03	0,006119	2	0,012238
244,89	0,006460	4	0,025840
241,75	0,006849	1	0,006849
			0,073703

$$0{,}073703 \cdot \frac{50{,}27}{48} = 0{,}077189 \qquad 1{,}216430\,,\quad \vartheta = 46^0\,20{,}48' \text{ bei } u = 241{,}75$$

$$\log u = 2{,}38337,\quad 9{,}83908,\quad \log v = 2{,}54429\,,\quad v = 3502,\quad g_y \sim 0{,}99075$$

$v \cos \vartheta$	Integrand	Faktor	Produkt
241,75	0,006849	1	0,006849
238,61	0,007321	4	0,029284
235,46	0,007945	1	0,007945
			0,044078

$$0{,}044078 \cdot \frac{50{,}27}{48} = 0{,}046162 \qquad 1{,}170262\,,\quad \vartheta = 45^0\,27 \quad \text{bei } u = 235{,}45$$

$$\log u = 2{,}37192,\quad 9{,}84605,\quad \log v = 2{,}52587\,,\quad v = 335{,}6,\quad g_y \sim 0{,}99072$$

$v \cos \vartheta$	Integrand	Faktor	Produkt
235,46	0,007945	1	0,007945
232,32	0,008807	4	0,035228
229,18	0,010052	1	0,010052
			0,053225

$$0{,}053225 \cdot \frac{50{,}27}{48} = 0{,}055742 \qquad 1{,}114526\,,\quad \vartheta = 44^0\,18{,}84 \quad \text{bei } u = 229{,}18$$

$$\log u = 2{,}36018,\quad 9{,}85462,\quad \log v = 2{,}50556\,,\quad v = 320{,}3,\quad g_y \sim 0{,}99062$$

Anlage 1.

10,5 cm Kan.

$v_0 = 879{,}7$ m

$\varphi = 54^0\,31'$

$P = 12$ kg

$i = 0{,}47287$ im aufsteigenden Ast

$= 0{,}93652$ im absteigenden Ast.

Stufenweise Flugbahnberechnung unter Berücksichtigung der neuen Versuche über den Luftwiderstand.

Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse in den einzelnen Stufen.

Durchführung der Rechnung auf der Beilage.

Stufen	x und Σx	y und Σy	ϑ	V_e	t und Σt	W_0	W_e
			54° 31'	879,7		885,5	
1. Stufe	1461 1461	2000 2000	53° 1'	625,6	3,330		652,6
2. Stufe	1587 3048	2000 4000	49° 40'	431,8	4,917 8,247	640,8	475,8
3. Stufe	1314 4362	1422,5 5422,5	44° 16'	320,0	5,194 13,441	451,2	370,0
4. Stufe	632 4994	577,6 6000	40° 23'	286,7	2,819 16,260	337,7	321,8
5. Stufe	780 5774	599,6 6599,6	34° 24'	255,5	3,631 19,891	304,2	293,7
6. Stufe	655 6429	400,4 7000	28° 14'	233,9	3,138 23,029	272,4	266,2
7. Stufe	1108 7537	450 7450	15° 14'	206,3	5,463 28,492	250,3	241,7
8. Stufe	1068 8605	147 7597	0	193,0	5,454 33,946	221,4	214,8
9. Stufe	1037 9642	147 7450	16° 8'	189,5	5,528 39,474	207,2	195,4
10. Stufe	1010 10652	449,6 7000,4	31° 18'	199,7	5,732 45,206	202,8	190,1
11. Stufe	567 11219	400,4 6600	38° 55'	210,1	3,391 48,597	212,9	204,0
12. Stufe	645 11864	600 6000	46° 37'	224,6	4,058 52,655	223,0	210,4
13. Stufe	496 12360	577,4 5422,6	51° 52'	236,8	3,306 55,961	237,0	224,6
14. Stufe	941,5 13301,5	1423 4000	60° 33'	258,8	6,912 62,873	247,4	215,3
15. Stufe	949,3 14251	2000 2000	68° 9'	274,7	8,345 71,218	265,1	213,0
16. Stufe	693 14944	2000 0	73° 23'	275,4	7,760 78,978	276,5	213,0

Anlage 2. Berechnung

	1	2	3	4	5	6	7
	1. Stufe		2. Stufe		3. Stufe		
φ	54° 31′		53° 1′		49° 40′		
$\log \cos \varphi$	9,76378		9,77930		9,81106		
$\log \cos^2 \varphi$	9,52756		9,55860		9,62212		
$\log 2$	0,30103		0,30103		0,30103		
$\log 2 \cos^2 \varphi$	9,82859		9,85963		9,92315		
ϑ_e	53°	53° 1′	50°	49° 40′	46°	44° 24′	44° 17′
w_e	600	651,8	450	475,6	370	370	370
$\log \cos \varphi$	9,76378	9,76378	9,77930	9,77930	9,81106	9,81106	9,81106
$\log \cos \vartheta_e$	9,77946	9,77930	9,80807	9,81106	9,84177	9,85399	9,85485
$\log \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e}$	9,98432	9,98448	9,97123	9,96824	9,96929	9,95707	9,95621
$\log w_e$	2,77815	2,81411	2,65321	2,67724	2,56820	2,56820	2,56820
$\log w_e \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e}$	2,76247	2,79859	2,62444	2,64548	2,53749	2,52527	2,52441
$w_e \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e}$	578,7	628,9	421,2	442,1	344,7	335,2	334,5
$m = K\left(w_e \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e}\right)$ Abb. 2	855	821	990	977	896	808	798
$n = K(w_e)$ Abb. 2	840	808	970	943	982	982	982
$\log m$	2,93197	2,91434	2,99564	2,98989	2,95231	2,90741	2,90200
$\log n$	2,92428	2,90741	2,98677	2,97451	2,99211	2,99211	2,99211
$\log \frac{m}{n}$	0,00769	0,00693	0,00887	0,01538	9,96020	9,91530	9,90989
$\log \frac{1}{\cos \vartheta_e}$	0,22054	0,22070	0,19193	0,18894	0,15823	0,14601	0,14515
$\log \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_e} = \underline{\log \beta_e}$	0,22823	0,22763	0,20080	0,20432	0,11843	0,06131	0,05504
$\log \frac{1}{\cos \varphi} = \underline{\log \beta_a}$	0,23622		0,22070		0,18894		
ϑ_m aus der Hauptrechnung Anlage 1		53° 55′		51° 45′		47° 38′	47° 35′
w_m aus der Hauptrechnung Anlage 1		768,7		558,2		410,6	410,6
$\log \cos \varphi$		9,76378		9,77930		9,81106	9,81106
$\log \cos \vartheta_m$		9,77009		9,79160		9,82858	9,82899
$\log \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_m}$		9,99369		9,98770		9,98248	9,98207
$\log w_m$		2,88576		2,74679		2,61342	2,61342
$\log w_m \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_m}$		2,87945		2,73449		2,59590	2,59549
$w_m \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_m}$		757,6		542,6		394,5	394,0
$m_1 = K\left(w_m \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_m}\right)$ aus Abb. 2		751		880		995	995
$n_1 = K(w_m)$ aus Abb. 2		746		868		994	994
$\log m_1$		2,87564		2,94448		2,99782	2,99782
$\log n_1$		2,87274		2,93852		2,99739	2,99739
$\log \frac{m_1}{n_1}$		0,00290		0,00596		0,00043	0,00043
$\log \frac{1}{\cos \vartheta_m}$		0,22991		0,20840		0,17142	0,17101
$\log \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_m} = \underline{\log \beta_m}$		0,23281		0,21436		0,17185	0,17144
β_m		1,7093		1,6382		1,4854	1,4840
β_a	1,7227	1,7227	1,6621	1,6621	1,5450	1,5450	1,5450
β_e	1,6913	1,6890	1,5878	1,6017	1,3135	1,1516	1,1351
$\beta_a + \beta_e$	3,4140	3,4117	3,2499	3,2638	2,8585	2,6966	2,6801
$\frac{\beta_a + \beta_e}{2}$	1,7070	1,7059	1,6250	1,6319	1,4293	1,3483	1,3400
$2\beta_m$		3,4186		3,2764		2,9708	2,9680
$\frac{\beta_a + \beta_e}{2} + 2\beta_m$		5,1245		4,9083		4,3191	4,3080
$\frac{1}{3}\left(\frac{\beta_a + \beta_e}{2} + 2\beta_m\right) = \underline{\beta}$		1,7081		1,6361		1,4397	1,4360

des β-Wertes.

8	9	10	11	12	13	18	19	32	33
Stufe 4a		4. Stufe		5. Stufe		8. Stufe		15. Stufe	
44° 16′		44° 16′		40° 23′		15° 14′		60° 33′	
9,85497		9,85497		9,88180		9,98447		9,69167	
9,70994		9,70994		9,76360		9,96894		9,38334	
0,30103		0,30103		0,30103		0,30103		0,30103	
0,01097		0,01097		0,06463		0,26997		9,68437	
36°	36° 39′	40°	40° 22′	34°	34° 23′	0		68°	68° 11′
315	312,2	320	321,2	290	293,3	215		210	212,2
9,85497	9,85497	9,85497	9,85497	9,88180	9,88180	9,98447		9,69167	9,69167
9,90796	9,90434	9,88425	9,88191	9,91857	9,91660	0,00000		9,57358	9,57012
9,94701	9,95063	9,97072	9,97306	9,96323	9,96520	9,98447		0,11809	0,12155
2,49831	2,49443	2,50515	2,50678	2,46240	2,46731	2,33244		2,32222	2,32675
2,44532	2,44506	2,47587	2,47984	2,42563	2,43251	2,31691		2,44031	2,44830
278,8	278,7	299,1	301,9	266,5	270,7	207,4		275,6	280,7
390	390	435	447	386	386	384		388	390
542	515	598	617	404	413	384		384	384
2,59106	2,59106	2,63849	2,65031	2,58659	2,58659			2,58883	2,59106
2,73400	2,71181	2,77670	2,79029	2,60638	2,61595			2,58433	2,58433
9,85706	9,87925	9,86179	9,86002	9,98021	9,97064	0,00000		0,00450	0,00673
0,09204	0,09566	0,11575	0,11809	0,06143	0,08340	0,00000		0,42642	0,42988
9,94910	9,97491	9,97754	9,97811	-6,06164	0,05404	0,00006		0,43092	0,43661
0,14503		0,14503		0,11820		0,01553		0,30833	
	41° 5′		42° 31′		37° 42′		8° 3′		64° 13′
	325,3		329,4		298,75		218,05		238,7
	9,85497		9,85497		9,88180		9,98447		9,69167
	9,87723		9,86752		9,89830		9,99570		9,63846
	9,97774		9,98745		9,98350		9,98877		0,05321
	2,51228		2,51772		2,47531		2,33856		2,37785
	2,49002		2,50517		2,45881		2,32733		2,43106
	309,1		320,0		287,6		212,5		269,8
	490		598		400		384		386
	680		737		432		384		384
	2,69020		2,77670		2,60206				2,58659
	2,83251		2,86747		2,63548				2,58433
	9,85769		9,90923		9,96658		0,00000		0,00226
	0,12277		0,13248		0,10170		0,00430		0,36154
	9,98046		0,04171		0,06828		0,00430		0,36380
	0,9560		1,1008		1,1703		1,0100		2,3110
1,3965	1,3965	1,3965	1,3965	1,3128	1,3128	1,0364	1,0364	2,0339	2,0339
0,8894	0,9439	0,9496	0,9509	1,1525	1,1325	1,0000	1,0000	2,6973	2,7328
2,2859	2,3404	2,3460	2,3474	2,4653	2,4453	2,0364	2,0364	4,7312	4,7667
1,1430	1,1702	1,1730	1,1737	1,2327	1,2227	1,0182	1,0182	2,3656	2,3834
	1,9120		2,2016		2,3406		2,0200		4,6220
	3,0822		3,3753		3,5633		3,0382		7,0054
	1,0274		1,1251		1,1878		1,0127		2,3351

Einphasiger Kurzschluß der Synchronmaschine.

Von *Yoshiro Ikeda* und *Motokichi Mori*, Sapporo; Japan.
(Physikalisches Institut der Hokkaido-Universität Japan.)

Der einphasige Kurzschlußstrom der Synchronmaschine genügt, wenn die magnetische Sättigung vernachlässigt werden kann, einer Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten. Da die Widerstände der Feld- und Ankerwicklung bei Kurzschluß sehr klein sind, so können wir die Widerstände als die kleinen Parameter der Differentialgleichung betrachten. Diese glücklichen Umstände bieten die Möglichkeit, den Kurzschlußstrom mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen.

Zunächst wurde die Gleichung in die Volterrasche Integralgleichung transformiert. Die Lösung wurde durch sukzessive Approximationen berechnet und mit der Potenz des kleinen Parameters weitergefahren. Die allgemeine Form der Lösung der Gleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten, ist bekannt[1]). Die Lösung besteht aus zwei Teilen, d. h. stationärer Schwingung und plötzlicher Schwingung. Wir haben die berechnete Potenzreihe mit dieser allgemeinen Form verglichen und die Lösung in der endgültigen Form gewonnen.

Endlich wird bestätigt, daß das numerische Beispiel mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt.

1. Kurzschlußströme. Es handelt sich nun um die Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{d}{dt}(M i_2) + R_1 i_1 = R_1 I \quad \dots \quad (1),$$

$$\frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{d}{dt}(M i_1) + R_2 i_2 = 0 \quad \dots \quad (2),$$

wobei i_1, i_2 die Ströme, L_1, L_2 die Induktivitäten, R_1, R_2 die Widerstände der Feld- und Ankerwicklung, M die gegenseitige Induktivität zwischen beiden Wicklungen und I der Erregerstrom ist.

Obwohl wir die Induktivitäten L_1 und L_2 als gewisse periodische Funktionen zu betrachten haben, setzen wir voraus, daß sie Konstante sind, denn unter der Voraussetzung sind wir zu dem Resultat gelangt, das mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt. Wenn sie auch die periodische Funktionen sind, können wir durch dieselbe Methode die Lösung bekommen.

Für die Synchronmaschine

$$M = M_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

geht durch die Substitutionen

$$\omega t + \varphi = v.$$

$$m = \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \quad \dots \quad (3),$$

$$\alpha = \frac{R_1}{L_1 \omega}, \quad \beta = \frac{R_2}{L_2 \omega} \quad \dots \quad (4),$$

das System der Gleichungen (1) und Gl. (2) über in Gl. (5) und Gl. (6),

$$\frac{d i_1}{d v} + \frac{M_0}{L_1} \frac{d}{d v}(i_2 \cos v) + \alpha i_1 = \alpha I \quad \dots \quad (5),$$

$$\frac{d i_2}{d v} + \frac{M_0}{L_2} \frac{d}{d v}(i_1 \cos v) + \beta i_2 = 0 \quad \dots \quad (6).$$

Schreiben wir

$$\frac{d i_1}{d v} + \alpha i_1 = \alpha I - \frac{M_0}{L_1} \frac{d}{d v}(i_2 \cos v),$$

$$\frac{d i_2}{d v} + \beta i_2 = -\frac{M_0}{L_2} \frac{d}{d v}(i_1 \cos v),$$

[1]) H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome I, S. 65.

so können wir die Gleichungen als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten. Nach der bekannten Formel ist die Lösung

$$i_1 = e^{-\alpha v} \int_0^v \left\{ a I - \frac{M_0}{L_1} \frac{d}{d v} (i_2 \cos v) \right\} d v + A_1 e^{-\alpha v} .$$

Durch partielle Integration wird

$$i_1 = \frac{B_1}{L_1} e^{-\alpha v} + I (1 - e^{-\alpha v}) - \frac{M_0}{L_1} i_2 \cos v + \int_0^v a \frac{M_0}{L_1} \cos v_1 \, e^{-\alpha (v - v_1)} i_2 \, d v \quad \text{. . . . . (7),}$$

wobei

$$\frac{B_1}{L_1} = A_1 + \frac{M_0}{L_1} i_2(0)$$

gesetzt ist.

In analoger Weise gewinnen wir

$$i_2 = \frac{B_2}{L_2} e^{-\beta v} - \frac{M_0}{L_2} \cos v \, i_1 + \int_0^v \beta \frac{M_0}{L_2} \cos v_1 \, e^{-\beta (v - v_1)} i_1 \, d v \quad \text{. . . . . (8).}$$

Eliminieren wir i_2 aus beiden Gleichungen, so haben wir

$$\left. \begin{aligned} i_1 (1 - m \cos^2 v) = {} & \frac{B_1}{L_1} e^{-\alpha v} + I (1 - e^{-\alpha v}) - m \frac{B_2}{M_0} \cos v \, e^{-\beta v} \\ & + a m \frac{B_2}{M_0} \frac{\{(a - \beta) \cos v + \sin v\} e^{-\beta v} - (a - \beta) e^{-\alpha v}}{(a - \beta)^2 + 1} \\ & - \int_0^v (a m \cos^2 v_1 \, e^{-\alpha (v - v_1)} + \beta m \cos v \cos v_1) \, i_1 \, d v \\ & + \int_0^v a \beta m \cos v_1 \, e^{-\alpha (v - v_1)} \int_0^v \cos v_2 \, e^{-\beta (v - v_2)} i_1 \, d v_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{. . . . . (9).}$$

Nach der Dirichtletschen Formel wird das letzte Integral

$$a \beta m \int_0^v i_1 \, d v_1 \left\{ \int_{v_1}^v \cos v_1 \cos v_2 \, e^{-\alpha (v - v_1) - \beta (v - v_2)} d v_1 \right\} .$$

Nun schreiben wir

$$\left. \begin{aligned} (i_1)_0 = {} & \frac{1}{1 - m \cos^2 v} \left[\frac{B_1}{L_1} e^{-\alpha v} + I (1 - e^{-\alpha v}) - m \frac{B_2}{M_0} \cos v \, e^{-\beta v} \right. \\ & \left. + a m \frac{B_2}{M_0} \frac{\{(a - \beta) \cos v + \sin v\} e^{-\beta v} - (a - \beta) e^{-\alpha v}}{(a - \beta)^2 + 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{. . . . . . . (10),}$$

$$\left. \begin{aligned} K(v, v_1) = {} & \frac{-1}{1 - m \cos^2 v_1} \left[a m \cos^2 v_1 \, e^{-\alpha (v - v_1)} + \beta m \cos v \cos v_1 \right. \\ & \left. - \frac{a \beta m \cos v_1}{1 + (a - \beta)^2} \frac{\{(a - \beta) \cos v + \sin v\} e^{-\beta (v - v_1)} - \{(a - \beta) \cos v_1 + \sin v_1\} e^{-\alpha (v - v_1)}}{1} \right] \end{aligned} \right\} \text{(11).}$$

Wir erhalten aus (9)

$$i_1 = (i_1)_0 + \int_0^v K(v, v_1) \, i_1 \, d v_1 \quad \text{. . . . . (12).}$$

Dies ist eine Volterrasche Integralgleichung, und die Lösung wird durch sukzessive Approximation erhalten.

Wenn man

$$\left. \begin{aligned} (i_1)_0 &= (i_1)_0 \\ (i_1)_1 &= \int_0^v K(v, v_1) (i_1)_0 \, d v \\ (i_1)_2 &= \int_0^v K(v, v_1) (i_1)_1 \, d v \end{aligned} \right\} \quad \text{. (13)}$$

setzt, so folgt nach der Theorie der Integralgleichung, daß die Folge

$$i_1 = (i_1)_0 + (i_1)_1 + (i_1)_2 + \dots \qquad (14)$$

unbedingt und gleichmäßig konvergiert und die Reihe die Lösung darstellt. Da der Kern $K(v, v_1)$ wenigstens die erste Ordnung des kleinen Parameters von a und β als Faktor enthält, so muß $(i_1)_k$ mindestens die k-te Ordnung des kleinen Parameters als Faktor enthalten.

Wenn a und β hinreichend klein sind, brauchen wir die Glieder höherer Ordnung in a und β nicht zu berücksichtigen.

Zuerst setzen wir voraus, daß a und β sehr klein sind, und daß a^2, β^2, $a\beta$ und ihre höhere Ordnung vernachlässigt werden können.

Nach der Voraussetzung haben wir aus (10), (11) und (12)

$$(i_1)_0 = \frac{1}{1 - m\cos^2 v}\left\{\frac{B_1}{L_1}(1 - a v) - \frac{B_2}{M_0} m \cos v + \frac{B_2}{M_0} m\, a \sin v + I a v\right\},$$

$$K(v, v_1) = \frac{-m}{1 - m\cos^2 v_1}(a\cos^2 v_1 + \beta\cos v \cos v_1).$$

Nach (13)

$$(i_1)_1 = \int_0^v K(v, v_1)(i_1)_0\, d v_1 = -m\int_0^v \frac{(a\cos^2 v_1 + \beta\cos v\cos v_1)}{1 - m\cos^2 v}\left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0}\cos v_1\right) d v_1 .$$

Schließlich

$$\left.\begin{aligned}
i_1(1 - m\cos^2 v) = \frac{B_1}{L_1}\Bigg\{1 &- \frac{a v}{\sqrt{1-m}} - \frac{a}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) - v\right]\\
&- \frac{m\beta}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)\right]\cos v\Bigg\}\\
&- \frac{B_2}{M_3} m\Bigg\{\cos v - \frac{\beta v\cos v}{\sqrt{1-m}} - \frac{\beta\cos v}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) - v\right]\\
&- \frac{a}{\sqrt{1-m}}\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)\right]\Bigg\} + I a v
\end{aligned}\right\} (15).$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten, ist bekannt und wird in der folgenden Form dargestellt:

$$i_1 = e^{-\delta v} P_1 + e^{-\gamma v} P_2 + P_3 \qquad (16),$$

wobei P_1, P_2 und P_3 periodische Funktionen von v sind, und sie werden durch die **Fourier**schen Reihen entwickelt. δ, γ, P_0, P_1, P_2 werden als Funktionen der kleinen Parameter a und β betrachtet. Also

$$\begin{aligned}
\delta &= \delta_0 + \delta_a a + \delta_\beta \beta\\
\gamma &= \gamma_0 + \gamma_a a + \gamma_\beta \beta\\
P_0 &= P_{00} + P_{0a} a + P_{0\beta}\beta\\
P_1 &= P_{10} + P_{1a} a + P_{1\beta}\beta\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Wenn man $a = 0$, $\beta = 0$ setzt, so ist die Lösung eine rein periodische Funktion von v. Daraus:

$$\delta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0.$$

Wenn man die Lösung nach der Potenz des Parameters fortschreiten läßt und a^2, β^2, $a\beta$ und ihre höheren Ordnungen vernachlässigt,

$$\left.\begin{aligned}
i_1 = P_{10} &+ a\{P_{1a} + \delta_{1a} P_{10}\} + P_{20} + a\{P_{21} + \gamma_{1a} P_{20}\}\\
&+ \beta\{P_{1\beta} + \delta_{1\beta} P_{10}\} + \beta\{P_{2\beta} + \gamma_\beta P_{20}\}\\
&+ P_{00} + P_{0a} a + P_{0\beta}\beta + \dots
\end{aligned}\right\} \qquad (17).$$

Vergleichen wir (15) mit (17), so ergibt sich

$$P_{10}=\left(\frac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)\frac{1}{1-m\cos^2 v},$$

$$P_{00}=I\sqrt{1-m}\,\frac{1}{1-m\cos^2 v},$$

$$P_{20}=-\frac{B_2\, m\cos v}{M_0(1-m\cos^2 v)},$$

$$\alpha\,\delta_\alpha=-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}},\quad \beta\,\gamma_\beta=-\frac{\beta}{\sqrt{1-m}},\quad \delta_\beta=\gamma_\alpha=0,$$

$$\alpha P_{1\alpha}=\left\{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)-v\right]\right\}P_{10},$$

$$\beta P_{1\beta}=\left\{-\frac{m\beta\cos v}{\sqrt{m}\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)\right]\right\}P_{10},$$

$$\alpha P_{2\alpha}=\left\{-\frac{\beta\cos v}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)-v\right]\right\}P_{20},$$

$$\beta P_{2\beta}=\left\{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)\right]\right\}P_{20},$$

$$P_0 a=\frac{I\sqrt{1-m}}{\dfrac{B}{L_1}-I\sqrt{1-m}}P_{1\alpha},\qquad P_{0\beta}=\frac{I\sqrt{1-m}}{\dfrac{B}{L_1}-I\sqrt{1-m}}.$$

In der Tat sind P_{10}, P_{00}, P_{20}, $P_{1\alpha}$, $P_{2\alpha}$, $P_{1\beta}$, $P_{2\beta}$, $P_{0\alpha}$ und $P_{0\beta}$ periodische Funktionen, und sie können durch die Fouriersche Reihe entwickelt werden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}=\mu,\quad \frac{\beta}{\sqrt{1-m}}=\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)=\lambda_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19),$$

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)=\lambda_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20),$$

so erhalten wir aus (15)

$$\begin{aligned}
i_1=&\frac{\left(\dfrac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)e^{-\mu v}}{1-m\cos^2 v}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-v]-\nu\cos v\, m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\\
&-\frac{\dfrac{B_2}{M_0}m\,e^{-\nu v}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v-\nu[\lambda_1+\lambda_2-v]\cos v-\mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\\
&+\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{1-\mu[\lambda_1+\lambda_2-v]-\nu\cos v\, m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}.
\end{aligned}$$

Wenn man aus (7) und (8) i_1 eliminiert, so kommt in analoger Weise

$$\begin{aligned}
\frac{M_0}{L_1}i_2=&-\frac{\left(\dfrac{B_1}{L_1}-I\sqrt{1-m}\right)e^{-\mu v}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v-\mu\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\\
&+\frac{\dfrac{B_2}{M_0}}{1-m\cos^2 v}\left\{1-\nu[\lambda_1+\lambda_2-v]-\mu\, m\cos v\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}\\
&-\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v-\mu\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v]-\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v} = 1 + a_2 \cos 2v + a_4 \cos 4v + a_6 \cos 6v + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

so sind die Fourierschen Konstanten

$$a_2 = \frac{4}{m}\left(1 - \frac{m}{2} - \sqrt{1-m}\right),$$

$$a_4 = -8\left(\frac{2}{m} - 1\right)\frac{\sqrt{1-m}}{m} + \frac{16}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right) + 2,$$

$$\begin{aligned} a_6 = & \left[-\frac{32}{m}\,\frac{3}{4} - \left(\frac{32}{m} - 48\right)\frac{1}{m} - \left\{\left(\frac{32}{m} - 48\right)\frac{1}{m} + 18\right\}\frac{2}{m}\right]\sqrt{1-m} \\ & + \left\{\left(\frac{32}{m} - 48\right)\frac{1}{m} + 18\right\}\frac{2}{m} - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_8 = & \left\{-\frac{128}{m}\cdot\frac{15}{48}\cdot 2 - \left(\frac{128}{m} - 256\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{3}{4} - \left\{\left(\frac{128}{m} - 256\right)\frac{1}{m} + 160\right\}\frac{1}{m}\right. \\ & \left. - \left[\left\{\left(\frac{128}{m} - 256\right)\frac{1}{m} + 160\right\}\frac{1}{m} - 32\right]\frac{2}{m}\right\}\sqrt{1-m} \\ & + \left[\left\{\left(\frac{128}{m} - 256\right)\frac{1}{m} + 160\right\}\frac{1}{m} - 32\right]\frac{2}{m} + 2. \end{aligned}$$

Daraus

$$\cos v\,\frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v} = a_1 \cos v + a_3 \cos 3v + a_5 \cos 5v + a_7 \cos 7v + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (22),$$

wobei

$$a_1 = 1 + \frac{a_2}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2},$$

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}, \qquad a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2},$$

$$a_9 = \frac{a_8 + a_{10}}{2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

gesetzt ist.

In der folgenden Zahlentafel sind die numerischen Werte der Fourierschen Konstanten zusammengestellt.

Zahlentafel.

m	0,91	0,84	0,75	0,64	0,51
$1-m$	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49
$\sqrt{1-m}$	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
a_1	1,54	1,43	1,33	1,25	1,17
a_2	1,08	0,86	0,67	0,50	0,35
a_3	0,83	0,61	0,45	0,31	0,19
a_4	0,58	0,36	0,22	0,12	0,04
a_5	0,45	0,26	0,14	0,07	0,02
a_6	0,32	0,16	0,07	0,02	0,00
a_8	0,25	0,11	0,04	0,01	0,00
a_9	0,19	0,06	0,01	0,00	0,00

Aus der Zahlentafel ist ersichtlich, daß es nicht bequem ist, die Funktionen (21), (22) durch die Cosinusreihen zu entwickeln, wenn m nicht so klein ist. Doch sind die Integrale durch die Cosinusreihen schnell zu approximieren;

$$\int_0^v \frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\,dv = \frac{\sqrt{1-m}}{2}\left\{\int_0^v \frac{dv}{1-\sqrt{m}\cos v} + \int_0^v \frac{dv}{1+\sqrt{m}\cos v}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)$$

$$= v + \frac{a_2}{2}\sin 2v + \frac{a_4}{4}\sin 4v + \frac{a_6}{6}\sin 6v + \dots\,.$$

$$\int_0^v \frac{\sqrt{1-m}\cos v}{1-m\cos^2 v}\,dv = \frac{\sqrt{1-m}}{2\sqrt{m}}\left\{\int_0^v \frac{dv}{1-\sqrt{m}\cos v} - \int_0^v \frac{dv}{1+\sqrt{m}\cos v}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}}\left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right)\right\}$$

$$= a_1 \sin v + \frac{a_3}{3}\sin 3v + \frac{a_5}{5}\sin 5v + \frac{a_7}{7}\sin 7v + \dots\,.$$

Also

$$\mu\,[\lambda_1 + \lambda_2 - v] \doteqdot \frac{a_2\,\mu}{2}\sin 2v\,,$$

$$\mu\,\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \doteqdot a_1\,\mu \sin v + \frac{a_3}{3}\sin 3v\,,$$

$$\nu\,\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}\cos v \doteqdot \frac{a_1\,\nu}{2}\sin 2v + \frac{a_3\,\nu}{6}\sin 4v\,,$$

$$\nu\,[\lambda_1 + \lambda_2 - v]\cos v = \frac{a_2\,\nu}{4}\sin v\,.$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{1 - \mu\,[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\, m\cos v\,\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\} = I_1\,,$$

$$\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v - \nu\cos v\,[\lambda_1+\lambda_2-v] - \mu\,\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\} = I_1'\,,$$

$$\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v - \mu\cos v\,[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\,\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\} = I_2\,,$$

$$\frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{1 - \nu\,[\lambda_1+\lambda_2-v] - \mu\cos v\, m\,\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}\right\} = I_2'\,,$$

so werden die Lösungen

$$i_1 = C_1 e^{-\mu v} I_1 - m\, C_2 e^{-\nu v} I_1' + I_1\,,$$

$$\frac{L_2}{M_0}\, i_2 = -\,C_1 e^{-\mu v} I_2 + C_2 e^{-\nu v} I_2' + I_2\,,$$

wobei

$$C_1 = \frac{\dfrac{B_1}{L_1} - I\sqrt{1-m}}{I\sqrt{1-m}}\,, \qquad C_2 = \frac{\dfrac{B_2}{M_0}}{I\sqrt{1-m}}$$

gesetzt ist.

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 setzen wir Anfangsbedingungen wie die folgenden voraus:

$$v = \varphi\,, \qquad i_1 = I\,, \qquad i_2 = 0\,.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$I = C_1 e^{-\mu\varphi} I_1 - m\, C_2 e^{-\nu\varphi} I_1' + I_1\,,$$

$$0 = -C_1 e^{-\mu\varphi} I_2 + C_2 e^{-\nu\varphi} I_2' + I_2$$

erhalten wir

$$C_1 = e^{-\mu\varphi}\left\{\frac{I\, I_2'(\varphi)}{I_1(\varphi)\, I_2'(\varphi) - m\, I_1'(\varphi)\, I_2(\varphi)} - 1\right\},$$

$$C_2 = e^{-\nu\varphi}\,\frac{I\, I_2}{I_1(\varphi)\, I_2'(\varphi) - m\, I_1'(\varphi)\, I_2(\varphi)}\,.$$

Zum Schlusse der Berechnung wollen wir das Ergebnis wiederholen: Die Kurzschlußströme i_1 und i_2 der Feld- und der Ankerwicklung sind

$$i_1 = C_1 e^{-\mu v} I_1(v) - m\, C_2 e^{-\nu v} I_1'(v) + I_1(v)\,,$$

$$i_2 = -\frac{M_0}{L_2} C_1 e^{-\mu v} I_2(v) + \frac{M_0}{L_2} C_2 e^{-\nu v} I_2'(v) - \frac{M_0}{L_2} I_2(v)\,,$$

wobei

$$I_1(v) \doteqdot \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{I - \left(\frac{a_1}{2}\nu m + \frac{a_2}{2}u + \frac{a_3}{6}\nu m\right)\sin 2v\right\},$$

$$I_1'(v) \doteqdot \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v - \left(a_1\mu + a_2\frac{\nu}{4}\right)\sin v\right\},$$

$$I_2(v) \doteqdot \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{\cos v - \left(a_1\nu + a_2\frac{\mu}{4}\right)\sin v\right\},$$

$$I_2'(v) \doteqdot \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\left\{1 - \left(\frac{a_1}{2}\mu m + \frac{a_2}{2}\nu + \frac{a_3}{6}\mu m\right)\sin 2v\right\},$$

$$\mu = \frac{R_1}{\sqrt{1-m}\, L_1}, \qquad \nu = \frac{R_2}{\sqrt{1-m}\, L_2}, \qquad m = \frac{M_0^2}{L_1 L_2},$$

$$v = \omega t + \varphi\,.$$

2. Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule. Im Falle der dreiphasigen Synchronmaschine wird die Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule wie folgt gegeben:

$$e = -M_0\omega\frac{d}{dv}\left\{i_1\cos\left(v \pm \frac{2\pi}{3}\right)\right\} + \frac{1}{2K}L_2\omega\frac{d}{dv}(i_2)$$

und damit ist $\qquad K \doteqdot 1\,.$

Also

$$e = -M_0\omega\frac{d}{dv}\left\{(C_1 e^{-\mu v} I_1 - C_2\, m\, e^{-\nu v} I_1' + I_1)\left(-\frac{1}{2}\cos v \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin v\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}L_2\omega\frac{M_0}{L_2}\frac{d}{dv}\{-C_1 e^{-\mu v} I_2 + C_2 e^{-\nu v} I_2' - I_2\}$$

$$= +M_0\omega\frac{d}{dv}\left\{\frac{C_1 e^{-\mu v}}{2}(I_1 - I_2) - \frac{C_2 e^{-\nu v}}{2}(m\, I_1' - I_2') + \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\right\}$$

$$\pm M_0\omega\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{dv}\{(C_1 e^{-\mu v} I_1 - C_2\, m\, e^{-\nu v} I_1' + I_1)\sin v\}\,.$$

Nehmen wir an, daß μ^2, ν^2, $\mu\nu$, $\mu - \nu$, $\mu(1-m)$, $\nu(1-m)$ gegen μ und ν vernachlässigt werden können, so folgt

$$I_1 - I_2 = \nu\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}},$$

$$m\, I_1' - I_2' = \nu\{-1 + [\lambda_1 + \lambda_2 - v]\}$$

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{C_1 e^{-\mu v}}{2}(I_1 - I_2) - \frac{C_2 e^{-\nu v}}{2}(m\, I_1' - I_2') + \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\right\}$$

$$= \frac{\nu}{2}\cdot\frac{\cos v\,(C_1 e^{-\mu v} + 1)}{1 - m\cos^2 v} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{1-m\cos^2 v} - 1\right)C_2 e^{-\nu v},$$

$$\frac{d}{d v}\{(C_1 e^{-\mu v} I_1 - C_2 m e^{-\nu v} I_1' + I_1) \sin v\} = (C_1 e^{-\mu v} + 1) \frac{d}{d v} I_1 \sin v$$

$$- C_2 m e^{-\nu v} \frac{d}{d v}(I_1' \sin v) - \mu C_1 e^{-\mu v} \frac{\sin v}{1 - m \cos^2 v} + \nu m C_2 e^{-\nu v} \frac{\cos v \sin v}{1 - m \cos^2 v}.$$

Nun

$$\frac{d}{d v}(I_1 \sin v) = \frac{(1-m) - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}$$

$$+ \mu \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - v]}{(1 - m \cos^2 v)^2} \{\cos v (m-1) + m \cos v \sin^2 v\} - \frac{\mu m \sin v \cos^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2}$$

$$- \frac{\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}}{(1 - m \cos^2 v)^2} \{1 - m - m^2 \sin^2 v \cos^2 v\} - \frac{\nu m \sin v \cos^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2}.$$

Da

$$\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} = a_1 \sin v + \frac{a_3}{3} \sin 3 v + \ldots$$

$$1{,}5 > a_1 > 1, \qquad a_3 \doteqdot 0,$$

$$[\lambda_1 + \lambda_2 - v] = a_2 \sin v \cos v$$

$$1 > a_2 > 0{,}3$$

und

$$\mu (m - 1) \doteqdot 0, \qquad \nu (m - 1) \doteqdot 0,$$

so ist

$$\frac{d I_1 \sin v}{d v} = \frac{(1-m) - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}.$$

In analoger Weise:

$$\frac{d I_1' \sin v}{d v} \doteqdot \frac{(2-m) \cos^2 v - 1}{(1 - m \cos^2 v)^2} + \nu [\lambda_1 + \lambda_2) - v].$$

Daraus kommt

$$e = \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ C_1 e^{-\mu v} \left(\frac{1 - m - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} - \frac{\mu \sin v}{1 - m \cos^2 v} \right) \right.$$

$$- C_2 e^{-\nu v} m \left(\frac{(2-m) \cos^2 v - 1}{(1 - m \cos^2 v)^2} + \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - v] - \frac{\nu \cos v \sin v}{1 - m \cos^2 v} \right)$$

$$\left. + I \sqrt{1-m} \left(\frac{1 - m - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right) \right\}$$

$$+ \frac{M_0 \omega}{2} \left\{ C_1 \nu e^{-\nu v} \frac{\cos v}{1 - m \cos^2 v} - C_2 \nu \frac{m \cos^2 v \, e^{-\nu v}}{1 - m \cos^2 v} + \frac{\nu \cos v}{1 - m \cos^2 v} \right\}$$

$$\doteqdot \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ C_1 e^{-\mu v} \frac{1 - m - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v - C_2 m e^{-\nu v} \frac{(2-m) \cos^2 v - 1}{(1 - m \cos^2 v)^2} \right.$$

$$\left. + I \sqrt{1-m} \left(\frac{1 - m - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu a_1 \sin v \right) \right\}$$

$$+ M_0 \frac{\omega}{2} \left\{ C_1 \nu e^{-\nu v} \frac{\cos v}{1 - m \cos^2 v} - C_2 \nu \frac{m \cos^2 v \, e^{-\nu v}}{1 - m \cos^2 v} + \frac{\nu \cos v}{1 - m \cos^2 v} \right\}.$$

Es ist zu bemerken, daß die Spannungen beider offenen Ankerwicklungen nicht einander gleich sind. Aber da der Widerstand der Ankerwicklung sehr klein ist, so kann man das letzte Glied vernachlässigen. Schließlich

$$e \doteqdot \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ C_1 e^{-\mu v} \frac{(1-m) - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v - C_2 e^{-\nu v} m \frac{(2-m) \cos^2 v - 1}{(1 - m \cos^2 v)^2} \right.$$

$$\left. + I \sqrt{1-m} \left(\frac{1 - m - m \sin^2 v}{(1 - m \cos^2 v)^2} \cos v + \nu a_1 \sin v \right) \right\}.$$

3. Vergleich mit den Oszillogrammen. In den vorangehenden Paragraphen haben wir die Methode gezeigt, um die Lösung zu berechnen. Nun wollen wir die Ergebnisse mit den Oszillogrammen vergleichen. Die Maschine, die wir gebraucht haben, ist ein 5-KVA-Dreiphasengenerator der Oana Seisakujo, Tokyo, 110 bis 220 Volt verkettete Spannung, 1500 bis 1800 Umdrehungen in der Minute, 50 bis 60 Perioden. Um die Brauchbarkeit der Differentialgleichungen streng zu erhalten, müssen wir den Fall vermeiden, wo die magnetische Sättigung auftritt. Deswegen haben wir uns nur mit dem Falle beschäftigt, wo der Feldstrom hinreichend klein ist. In diesem Falle wurden die Induktivitäten gemessen

$$L_1 = 7{,}4 \text{ henry}$$

$$L_2 = 0{,}0083 \text{ henry}$$

$$M_0 = 0{,}277 \text{ henry}.$$

Abb. 1a.

Abb. 1b.

Abb. 1c.

Daraus

$$m = \frac{M_0^2}{L_1 L_2} = 0{,}84\,, \qquad \frac{M_0}{L_2} = 27\,.$$

Zuerst haben wir den Fall untersucht, wo die Widerstände

$$R_1 = 300 \text{ ohm}\,, \quad R_2 = 0{,}25 \text{ ohm}$$

sind. Daraus

$$\mu = \frac{R_1}{\sqrt{1 - m}\,\omega L_1} = 0{,}27\,, \qquad \nu = \frac{R_2}{\sqrt{1 - m}\,\omega L_2} = 0{,}20\,.$$

Abb. 1a zeigt das Oszillogramm der Ströme, welche in dem Moment, wo $\varphi = 0$, d. h. im Nullwert der Spannung kurzgeschlossen wurden. Abb. 1b und c zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwicklung in demselben Falle.

Abb. 2a zeigt das Oszillogramm der Ströme, welche in dem Moment, wo $\varphi = 75^0$, kurzgeschlossen wurden. Abb. 2b und c zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwicklung in demselben Falle.

Abb. 3a zeigt das Oszillogramm des Kurzschlußstromes der Feldwicklung und der Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwicklung, welche in dem Moment, wo $\varphi = 105°$, kurzgeschlossen wurde. Abb. 3b und c zeigen den berechneten Kurzschlußstrom der Feldwicklung und die berechnete Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwicklung in demselben Falle.

Abb. 2a.

Abb. 2b.

Abb. 2c.

Abb. 3a.

Abb. 3b.

Abb. 3c.

4. Weitere Annäherung. Wenn die Widerstände größer werden, so werden die maximalen Kurzschlußströme immer kleiner. Das vorangehende Resultat ist nicht mehr brauchbar, und eine weitere Annäherung wird benötigt.

Berechnen wir die Gl. (10) und (11) bis zur zweiten Ordnung von α und β, wie in dem ersten Paragraphen gezeigt wird, so gelangen wir zu den folgenden Resultaten:

$$i_1 = \frac{C_1 e^{-\mu v}\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\Big\{1 - \mu[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos v + \frac{\mu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-v]^2$$

$$+ \mu\nu\cos v\cdot m\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-v]}{\sqrt{m}} + \mu\nu\frac{m}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m} - \nu(\mu-\nu)m\cos v\,\Phi(v)\Big\}$$

$$-\frac{mC_2 e^{-\nu v}\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\Big\{\cos v - \nu\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v] - \mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\nu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-v]\cos v$$

$$+ \mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-v] + \frac{\nu\mu}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{\sqrt{m}}m\cos v + \mu(\mu-\nu)\Phi(v)\Big\}$$

$$+\frac{I\sqrt{1-m}}{1-\cos^2 v}\Big\{1 - \mu[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{m}m\cos v + \frac{\mu^2}{2}[\lambda_1+\lambda_2-v]^2$$

$$+ \mu\nu\cos v\, m\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-v] + \mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m}\frac{m}{2} - \nu(\mu-\nu)m\cos v\,\Phi(v)$$

$$+ \mu^2\{\psi(v)-\psi(0)\} + m\mu\nu\chi(v)\cos v\Big\}.$$

$$i_1 = -\frac{M_0}{L_z}\frac{C_1 e^{-\mu v}\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\Big\{\cos v - \mu\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu^2}{2}\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v]^2$$

$$+ \mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2][\lambda_1+\lambda_2-v]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2}m\cos v\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m} + \nu(\mu-\nu)\Phi(v)\Big\}$$

$$+\frac{M_0}{L_2}\frac{C_2 e^{-\nu v}\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2 v}\Big\{1 - \nu[\lambda_1+\lambda_2-v] - \mu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}m\cos v + \frac{\nu}{2}[\lambda_1+\lambda_2-v]^2$$

$$\mu\nu\cos v\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-v] + \mu\nu\frac{m}{2}\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{\sqrt{m}} - \mu[\nu-\mu]m\cos v\,\Phi(v)\Big\}$$

$$-\frac{I\sqrt{1-m}\,\dfrac{M_0}{L_2}}{1-m\cos^2 v}\Big\{\cos v - \mu\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v] - \nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu^2}{2}\cos v[\lambda_1+\lambda_2-v]^2$$

$$+ \mu\nu\frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}[\lambda_1+\lambda_2-v] + \frac{\mu\nu}{2}m\cos v\frac{[\lambda_1-\lambda_2]^2}{m} + \nu(\nu-\mu)\Phi(v)$$

$$+ \mu\nu\chi(v) + \mu^2\cos v[\psi(v)-\psi(0)]\Big\},$$

wobei

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) = \lambda_1, \qquad \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{v}{2}\right) = \lambda_2,$$

$$\omega t = v, \quad \mu = \frac{R_1}{\sqrt{1-m}\,\omega L_1}, \qquad \nu = \frac{R_2}{\sqrt{1-m}\,\omega L_2},$$

$$\int_0^v \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}}dv = \chi(v) - \chi(0),$$

$$\int_0^v [\lambda_1+\lambda_2-v]\,dv = \psi(v) - \psi(0),$$

$$\sqrt{1-m}\int_0^v \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m\cos^2 v)}dv = \Phi(v) - \Phi(0).$$

Die Berechnungen werden wir an anderer Stelle publizieren [2]); doch ist zu bemerken, daß das Resultat der Berechnung auch mit dem Oszillogramm wirklich übereinstimmt. 128

[2]) Journal of the Faculty of Science, Series B.

Zur strengen Berechnung der Stabkräfte und -momente im Rhombenfachwerk in Abhängigkeit von den Schlankheitsverhältnissen der Gurt- und Diagonalstäbe.

Von *H. Steuding,* Breslau.

1. Einleitung. Aus neuerer Zeit liegen, abgesehen von einigen diskussionsartig gehaltenen Aufsätzen in der „Bautechnik" von Hartmann[1]), Krabbe[2]), Christiani[3]), drei theoretische Arbeiten zur strengen Spannungsermittlung am Rhombenfachwerk vor, die Aachener Dissertation von Christiani[4]), seine zweite[5]) Arbeit über denselben Gegenstand und die Breslauer Dissertation von Rollfinke[6]). Da in diesen Arbeiten im wesentlichen ein bestimmtes Beispiel durchgerechnet wird, so lassen sich die gewonnenen Ergebnisse nicht ohne weiteres übertragen oder verallgemeinern. Es bleibt somit immer noch eine Lücke in der Beurteilung der Nebenspannungen am Rhombenfachwerk in Abhängigkeit von den Schlankheitsverhältnissen bestehen, auf die von Hartmann[1]) mit besonderem Nachdruck hingewiesen wird.

Um diese Abhängigkeit allgemein darzulegen und nach Möglichkeit geschlossene Formeln für die strenge Berechnung herzuleiten, erschien mir die Deformationsmethode[7]) sehr geeignet, da sie gestattet, die Kraftgrößen an den Enden eines Stabes unmittelbar durch die Formänderungsgrößen der beiden benachbarten Knotenpunkte auszudrücken, welche ihrerseits in verhältnismäßig einfacherer Weise als bei der Kraftmethode ermittelt werden können.

Durch Zerlegung eines beliebigen Belastungsfalles in einen symmetrischen und antisymmetrischen, bezogen auf die Längsachse des Trägers, wird der durch die dem Rhombenfachwerk eigentümliche Scherenwirkung hervorgerufene zusätzliche Deformations- und Spannungszustand im symmetrischen Fall von dem Hauptzustand im antisymmetrischen Fall getrennt. Auch das gelenkig gedachte Rhombenfachwerk ohne Riegel hat keine zur Längsachse antisymmetrische Bewegungsfreiheit, so daß es sich in diesem Fall ganz „vernünftig" verhält. Für die Ermittlung der Stabkräfte und -momente unter Berücksichtigung der Knotensteifigkeit lassen sich sogar explizite Formeln aufstellen. Diese Möglichkeit wird dadurch bedingt, daß der homogene Lösungsanteil des Differenzengleichungssystems gegenüber der partikulären Lösung, welche explizite gefunden werden kann, fast gänzlich verschwindet.

Die scherenartige Bewegungsfreiheit tritt erst im symmetrischen Fall auf und bedingt den dem Rhombenfachwerk eigentümlichen zusätzlichen Formänderungs- und Spannungszustand, welcher nunmehr im wesentlichen als homogener Lösungsanteil gefunden wird, so daß hier, abgesehen von dem Fall einer gleichmäßig verteilten Knotenlast, allgemein keine explizite Formeln für die gesuchten Größen aufgestellt werden können. Nur für die später erwähnten Grenzfälle eines idealen Fachwerkes konnten auch hier explizite Formeln angegeben werden, ebenso wie für die gleichmäßig verteilte Belastung in allen Fällen. Allgemein ist die Abhängigkeit dieser zusätzlichen Zustände von den Schlankheitsverhältnissen der Gurte und Diagonalen nur zahlenmäßig gezeigt worden.

Abb. 1.

Abb. 2. Das Rhombenfachwerk.

Hierbei ist in beiden Fällen der Grenzübergang zu unendlich schlanken Stäben vollzogen worden. Die Knotenverdrehungen nähern sich dann einer ganz bestimmten Grenzlage, die von den Schlankheitsverhältnissen der einzelnen Stäbe zueinander abhängig ist, da diese beim

[1]) Hartmann, Bautechnik 1928, S. 414.
[2]) Krabbe, Bautechnik 1929, S. 117.
[3]) Christiani, Bautechnik 1929, S. 183.
[4]) Christiani, Diss. T. H. Aachen 1926.
[5]) Christiani, Strenge Untersuchungen am Rhombenfachwerk. Berlin 1929, Springer.
[6]) Rollfinke, Diss. T. H. Breslau 1929.
Hinweise auf ältere Literatur findet man in diesen Veröffentlichungen.
[7]) Mann, Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927, Springer. — Ostenfeld, Die Deformationsmethode. Berlin 1926, Springer. — Insbesondere wird auf die erschöpfende Theorie von Mann verwiesen.

Grenzübergang unberührt konstant bleiben. Die Knotenverschiebungen werden identisch mit denen eines gelenkig gedachten Fachwerkes. Dadurch konnten auch die extremen zusätzlichen Formänderungs- und Spannungszustände im idealen Fall streng angegeben werden.

2. Die angewandte Berechnungsmethode. Als Unbekannte werden die Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen eingeführt, durch welche sowohl der gesamte Formänderungszustand als auch der gesamte Kräftezustand beschrieben wird. Sind z. B. die Knotenverschiebungen u und v und die Knotendrehwinkel γ zweier benachbarter Knotenpunkte ν und $\nu + 1$ gegeben, Abb. 1, so erhält man die am Verbindungsstab angreifenden Endmomente und Kräfte in bekannter Weise aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} M_\nu &= \frac{2\,EJ}{s}\left(2\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} - 3\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + 3\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right) \\ M_{\nu+1} &= \frac{2\,EJ}{s}\left(\gamma_\nu + 2\gamma_{\nu+1} - 3\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + 3\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right) \\ Q_\nu &= -Q_{\nu+1} = \frac{6\,EJ}{s^2}\left(\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} - 2\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + 2\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right) \\ N_\nu &= N_{\nu+1} = EF\left(\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\sin\vartheta + \frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\cos\vartheta\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Ist der Stab außerdem noch selbst innerhalb seines Feldes belastet, so treten hierzu noch die durch diese Lasten bedingten Auflagerreaktionen eines beiderseits starr eingespannten Balkens.

Mit Hilfe dieser Beziehungen werden die Momente und Kräfte, die von den Stäben auf einen gemeinsamen Knotenpunkt oder von einem Fachwerkteil auf einen anderen übertragen werden, durch die eingeführten unbekannten Formänderungsgrößen ausgedrückt. Die Gleichgewichtsbedingungen an den einzelnen Knotenpunkten oder an den ganzen Fachwerkteilen liefern dann die Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten.

Um die folgenden Untersuchungen möglichst zu vereinfachen, legen wir der Berechnung einen einseitig gelagerten Träger, Abb. 2, zugrunde, der durch eine Einzellast P_1 am Ende und eine gleichverteilte Knotenlast P belastet wird. Diesen Belastungsfall zerlegen wir in einen antisymmetrischen, Abb. 3, und einen symmetrischen, Abb. 4, bezogen auf die Längsachse des Trägers, so daß durch verschiedene Kombinationen dieser Lastfälle sowohl der Fall der Abb. 2, als auch der, bei dem die Lasten am oberen Gurt angreifen, bzw. auch die Fälle mit abwechselnd oberem oder unterem festen Lager erhalten werden. Hierbei werden zahlenmäßig fünf Hauptfälle mit verschiedenen Unterfällen untersucht. Die Hauptfälle beziehen sich auf die Schlankheitsverhältnisse der Gurt- und Diagonalstäbe, die Unterfälle auf verschieden steife, starre oder gar keine Riegel am rechten und linken Ende, bzw. auch auf eine Führung der rechten Trägerenden, so daß außer dem Fall eines einseitig gelagerten Trägers auch der Fall eines Trägers auf zwei Stützen mit einer Last in der Mitte mit und ohne Riegel in der Mitte und an den Auflagerenden miterfaßt wird.

Abb. 3. Der antisymmetrische Belastungsfall.

Abb. 4. Der symmetrische Belastungsfall.

3. Der antisymmetrische Fall, Abb. 3. Bei Annahme gleicher Gurtquerschnitte sind die Formänderungsgrößen am oberen und unteren Gurt gleich und antisymmetrisch. Die Knotendrehwinkel am unteren Gurt werden mit γ, an den Kreuzungspunkten der Diagonalen mit β bezeichnet, die zur Trägerachse senkrechten Verschiebungen oder Durchbiegungen an den Gurtknoten mit w, an den Kreuzungsknoten mit v, die Verschiebungen in Richtung der Achse an den Gurtknoten mit u, an den Kreuzungsknoten der Diagonalen müssen diese aus Gründen der Antisymmetrie verschwinden, so daß fünf unbekannte Formänderungsgrößen γ, w, u und β, v auftreten, deren Vorzeichen durch das in Abb. 3 angegebene Achsenkreuz festgelegt werden.

Mit den aus Abb. 3 ersichtlichen Bezeichnungen und Knotennumerierung können nun die Ausgangsgleichungen für die Unbekannten γ, $\frac{w}{s}$, $\frac{u}{s}$, β und $\frac{v}{s}$ aus den Gleichgewichtsbedingungen an den einzelnen Knotenpunkten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) unmittelbar angeschrieben werden.

Aus der Momentengleichgewichtsbedingung am Kreuzungsknoten der Diagonalen ν erhält man die Gleichung

$$\frac{2EJ_2}{s}\left(\gamma_\nu + 4\beta_\nu + \gamma_{\nu+1} - 3\frac{w_{\nu+1} - w_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s} - 3\frac{u_{\nu+1} + u_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\frac{2EJ_1}{\lambda}\left(\gamma_{\nu-1} + 4\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} - 3\frac{w_{\nu+1} - w_{\nu-1}}{\lambda}\right) + \frac{2EJ_2}{s}\left(\beta_{\nu-1} + 4\gamma_\nu + \beta_\nu - 3\frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s} - 6\frac{h}{s}\cdot\frac{u_\nu}{s}\right) = 0 \quad (3).$$

Aus dem Gleichgewicht der Kräfte in der y-Richtung, oder senkrecht zur Trägerachse, am Kreuzungsknoten der Diagonalen ν folgt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &EF_2\frac{h}{s}\left(\frac{w_{\nu+1} - 2v_\nu + w_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s} + \frac{u_\nu - u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right) \\ &\quad + \frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{\lambda}{2s}\left(\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1} + 2\frac{w_{\nu+1} - 2v_\nu + w_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s} + 2\frac{u_{\nu+1} - u_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\left.\begin{aligned} &EF_2\frac{v_{\nu-1} - 2w_\nu + v_\nu}{s}\cdot\frac{h^2}{s^2} + \frac{6EJ_1}{\lambda^2}\left(\gamma_{\nu-1} - \gamma_{\nu+1} + 2\frac{w_{\nu+1} - 2w_\nu + w_{\nu-1}}{\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{\lambda}{2s}\left(\beta_{\nu-1} - \beta_\nu + 2\frac{v_\nu - 2w_\nu + 2v_{\nu-1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right) = \frac{P}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Schließlich erhält man aus dem Gleichgewicht der Kräfte in der Richtung der x-Achse am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes die letzte Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &EF_2\cdot\frac{\lambda}{2s}\left(\frac{v_{\nu-1} - v_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s} + 2\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right) - EF_1\frac{u_{\nu+1} - 2u_\nu + u_{\nu-1}}{\lambda} \\ &\quad - \frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{h}{s}\left(\beta_{\nu-1} + 2\gamma_\nu + \beta_\nu - 2\frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s} - 4\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Abb. 5.

Abb. 6.

Außer diesen Gleichungen können noch je zwei Gleichungen aus der Momenten- und Querkraft-Gleichgewichtsbedingung am ganzen links abgeschnittenen Trägerteil, je nachdem ob der Schnitt nach Abb. 5 oder Abb. 6 geführt wird, aufgestellt werden. Sie sind von den obigen Gleichungen nicht mehr unabhängig und werden zur Kontrolle und aus später ersichtlichen Gründen mit angeschrieben.

Aus dem Gleichgewicht der Querkräfte beim Schnitt nach Abb. 5 folgt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} E F_2 \frac{h}{s}\left(\frac{w_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}-\frac{u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right)-\frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{\lambda}{2s}\left(\gamma_{\nu+1}+\beta_\nu-2\frac{w_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-2\frac{u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) \\ -\frac{6EJ_1}{\lambda^2}\left(\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1}-2\frac{w_{\nu+1}-w_\nu}{\lambda}\right)=\frac{P_1}{2}+\frac{P}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

und beim Schnitt nach Abb. 6 die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} E F_2 \frac{h}{s}\left(\frac{w_\nu-v_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}+\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right)+\frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{\lambda}{2s}\left(\gamma_\nu+\beta_\nu-2\frac{v_\nu-w_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-2\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) \\ +\frac{6EJ_1}{\lambda^2}\left(\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1}-2\frac{w_{\nu+1}-w_\nu}{\lambda}\right)=-\frac{P_1}{2}-\frac{P}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Aus der Momenten-Gleichgewichtsbedingung beim Schnitt nach Abb. 5 folgt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} E F_1 \frac{u_\nu-u_{\nu+1}}{\lambda}\cdot h+E F_2\left(\frac{v_\nu-w_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{h}{s}+\frac{u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right)\frac{h\lambda}{2s}+\frac{2EJ_1}{\lambda}\left(\gamma_{\nu+1}+2\gamma_\nu-3\frac{w_{\nu+1}-w_\nu}{\lambda}\right) \\ +\frac{2EJ_2}{s}\left(2\beta_\nu+\gamma_{\nu+1}-3\frac{w_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-3\frac{u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{h}{s}\right) \\ +\frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{\lambda^2}{4s}\left(\beta_\nu+\gamma_{\nu+1}-2\frac{w_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-2\frac{u_{\nu+1}}{s}\cdot\frac{h}{s}\right)=\frac{P_1}{2}\nu\lambda+\frac{P}{4}\nu^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und beim Schnitt nach Abb. 6 die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} E F_1 \frac{u_\nu-u_{\nu+1}}{\lambda}\cdot h+E F_2\frac{\lambda h}{2s}\left(\frac{w_\nu-v_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}+\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}\right)+\frac{2EJ_1}{\lambda}\left(\gamma_{\nu+1}+2\gamma_\nu-3\frac{w_{\nu+1}-w_\nu}{\lambda}\right) \\ +\frac{2EJ_2}{s}\left(2\gamma_\nu+\beta_\nu-3\frac{v_\nu-w_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-3\frac{u_\nu}{s}\frac{h}{s}\right) \\ -\frac{6EJ_2}{s^2}\cdot\frac{h^2}{s}\left(\gamma_\nu+\beta_\nu-2\frac{v_\nu-w_\nu}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-2\frac{u_\nu}{s}\cdot\frac{h}{s}\right)=\frac{P_1}{2}\nu\lambda+\frac{P}{4}\nu^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Nach Einführung der Abkürzungen

$$\frac{J_2\lambda}{J_1 s}=\varrho\,, \quad \frac{J_1}{F_2\lambda^2}=\varrho_1\,, \quad \frac{J_2}{F_2 s^2}=\varrho_2\,, \quad \frac{F_1}{F_2}=\varrho_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

gehen die Gl. (2) bis (6) für die Unbekannten γ_ν, $\frac{w_\nu}{s}$, $\frac{u_\nu}{s}$, β_ν, $\frac{v_\nu}{s}$ in die folgenden Differenzengleichungen über

$$4\beta_\nu+\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1}-3\frac{\lambda}{2s}\cdot\frac{w_{\nu+1}-w_\nu}{s}-3\frac{h}{s}\cdot\frac{u_\nu+u_{\nu+1}}{s}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2a),$$

$$4(1+\varrho)\gamma_\nu+\gamma_{\nu-1}+\gamma_{\nu+1}+\varrho\beta_{\nu-1}+\varrho\beta_\nu-3\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_{\nu+1}-w_{\nu-1}}{s}-3\varrho\frac{v_\nu-v_{\nu-1}}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-6\varrho\frac{h}{s}\cdot\frac{u_\nu}{s}=0 \quad (3a),$$

$$-2\left(\frac{h^2}{s^2}+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{s^2}\right)\frac{v_\nu}{s}+\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{w_\nu+w_{\nu+1}}{s}+\frac{\lambda h}{2s^2}\left(1-12\varrho_2\right)\frac{u_\nu-u_{\nu+1}}{s}+3\varrho_2\cdot\frac{\lambda}{s}(\gamma_\nu-\gamma_{\nu+1})=0 \quad . \quad (4a),$$

$$\left.\begin{aligned} -2\left(\frac{h^2}{s^2}+12\frac{s}{\lambda}\varrho_1+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{w_\nu}{s}+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_{\nu-1}+w_{\nu+1}}{s}+\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{v_{\nu-1}+v_\nu}{s} \\ +6\varrho_1(\gamma_{\nu-1}-\gamma_{\nu+1})+3\frac{\lambda}{s}\varrho_2(\beta_{\nu-1}-\beta_\nu)=\frac{P}{2EF_2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5a),$$

$$\left(2\frac{s}{\lambda}\varrho_3+\frac{\lambda^2}{2s^2}+24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s}-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\cdot\frac{u_{\nu-1}+u_{\nu+1}}{s}+\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{v_{\nu-1}-v_\nu}{s}-6\frac{h}{s}\varrho_2(2\gamma_\nu+\beta_{\nu-1}+\beta_\nu)=0 \quad (6a)$$

und die Kontrollgleichungen (7) bis (10) in

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\right)\frac{w_{\nu+1}}{s}-12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\frac{w_\nu}{s}-\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{v_\nu}{s}-\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{u_{\nu+1}}{s}\\&\qquad-3\frac{\lambda}{s}\varrho_2\beta_\nu-\left(6\varrho_1+3\varrho_2\frac{\lambda}{s}\right)\gamma_{\nu+1}-6\varrho_1\gamma_\nu=\frac{P_1}{2EF_2}+\frac{P\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2EF_2}\end{aligned}\right\} \quad (7a),$$

$$\left.\begin{aligned}&-12\varrho_1\cdot\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_{\nu+1}}{s}+\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\right)\frac{w_\nu}{s}+\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{u_\nu}{s}-\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{v_\nu}{s}\\&+3\frac{\lambda}{s}\varrho_2\beta_\nu+\left(3\frac{\lambda}{s}\varrho_2+6\varrho_1\right)\gamma_\nu+6\varrho_1\gamma_{\nu+1}=-\frac{P_1}{2EF_2}-\frac{P\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2EF_2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8a),$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{sh}{\lambda^2}\varrho_3\frac{u_\nu}{s}+\left(\frac{\lambda h}{4s^2}-\frac{sh}{\lambda^2}\varrho_3-6\frac{h}{\lambda}\varrho_2-3\frac{h\lambda}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_{\nu+1}}{s}+6\varrho_1\frac{s}{\lambda}\frac{w_\nu}{s}\\&\quad-\left(6\frac{s}{\lambda}\varrho_1+3\varrho_2+\frac{3\lambda^2}{2s^2}\varrho_2+\frac{h^2}{2s^2}\right)\frac{w_{\nu+1}}{s}+\left(3\varrho_2+\frac{3\lambda^2}{2s^2}\varrho_2+\frac{h^2}{2s^2}\right)\frac{v_\nu}{s}+4\varrho_1\gamma_\nu\\&\quad+\left(2\varrho_1+2\frac{s}{\lambda}\varrho_2+\frac{3\lambda}{2s}\varrho_2\right)\gamma_{\nu+1}+\left(4\frac{s}{\lambda}\varrho_2+\frac{3\lambda}{2s}\varrho_2\right)\beta_\nu=\frac{P_1\nu}{2EF_2}+\frac{P\nu^2}{4EF_2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9a),$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{sh}{\lambda^2}\varrho_3+\frac{h\lambda}{4s^2}-6\frac{h}{\lambda}\varrho_2+12\frac{h^3}{s^2\lambda}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s}-\frac{sh}{\lambda^2}\varrho_3\frac{u_{\nu+1}}{s}-6\frac{s}{\lambda}\varrho_1\frac{w_{\nu+1}}{s}\\&\quad+\left(6\frac{s}{\lambda}\varrho_1-6\frac{h^2}{s^2}\varrho_2+3\varrho_2+\frac{h^2}{2s^2}\right)\frac{w_\nu}{s}+\left(6\frac{h^2}{s^2}\varrho_2-3\varrho_2-\frac{h^2}{2s^2}\right)\frac{v_\nu}{s}\\&\quad+\left(2\frac{s}{\lambda}\varrho_2-6\frac{h^2}{s\lambda}\varrho_2\right)\beta_\nu+\left(4\varrho_1+4\frac{s}{\lambda}\varrho_2-6\frac{h^2}{s\lambda}\varrho_2\right)\gamma_\nu+2\varrho_1\gamma_{\nu+1}=\frac{P_1\nu}{2EF_2}+\frac{P\nu^2}{4EF_2}\end{aligned}\right\} \quad (10a).$$

Die oben erwähnten zwischen den Ausgangsgleichungen (2a) bis (6a) und den Kontrollgleichungen (7a) bis (10a) bestehenden Beziehungen sind in symbolischer Schreibweise

$$\left.\begin{aligned}(7a)_\nu+(8a)_\nu&=(4a)_\nu\\(7a)_{\nu-1}+(8a)_\nu&=-(5a)_\nu\\(10a)_\nu-(9a)_\nu&=\frac{1}{2}(4a)_\nu-2\frac{s}{\lambda}\varrho_2(2a)_\nu\\(10a)_\nu-(9a)_{\nu-1}-(7a)_{\nu-1}&=2\frac{s}{\lambda}\frac{\varrho_2}{\varrho}(3a)_\nu+\frac{h}{\lambda}(6a)_\nu\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wobei berücksichtigt werden muß, daß

$$\frac{\varrho_2}{\varrho}\frac{s}{\lambda}=\varrho_1 \quad \text{und} \quad s^2=h^2+\frac{\lambda^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist. An Hand dieser Beziehungen (12) sind die Gl. (2a) bis (10a) geprüft worden.

Beschränken wir uns bei der Aufsuchung der partikulären Lösung nur auf das System der Ausgangsgleichungen (2a) bis (6a), ohne auf das System der Kontrollgleichungen (7a) bis (10a) Rücksicht zu nehmen, so erscheint ein Teil der partikulären Lösung mit als Bestandteil der homogenen Lösung und kann erst im weiteren Verlauf der Rechnung gefunden werden. Nehmen wir jedoch auch die Kontrollgleichungen (7a) bis (10a) mit hinzu, so erhalten wir den partikulären Teil der Lösung sofort vollständig. Außerdem treten dann noch zwei weitere Vorteile hinzu; erstens derjenige einer ständigen Kontrolle, indem jede einzelne Konstante des Lösungsansatzes oder jedes einzelne Verhältnis zwischen denselben aus je zwei Gleichungen gesondert gefunden wird, zweitens können die wichtigsten Teile der partikulären Lösung sogar ex-

plizite durch geschlossene Formeln allgemein in Buchstaben ausgedrückt werden, und nur die unwichtigeren werden, um gar zu umständliche Formeln zu vermeiden, nach Einsetzen von Zahlen gewonnen. Für die Ermittlung der homogenen Lösung ist das hier gewählte System (2a) bis (6a) jeder anderen Kombination von fünf unabhängigen Gleichungen vorzuziehen.

Bei der zahlenmäßigen Behandlung werden wir, wie anfangs erwähnt, fünf Hauptfälle, die mit römischen Ziffern I bis V bezeichnet werden sollen, unterscheiden.

Für alle Fälle setzen wir einen Träger mit 14 Feldern ($n=14$) und mit senkrecht zueinander stehenden Diagonalen ($\vartheta=45^{\circ}$) nach Abb. 3 voraus, so daß für die Zahlenrechnung $\frac{\lambda}{s}=\sqrt{2}$, $\frac{h}{s}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{h}{\lambda}=\frac{1}{2}$ zu setzen ist.

In den Fällen I und II wird ein Träger mit gleichen Querschnitten in den Gurt- und Diagonalstäben angenommen, d. h. $J_1=J_2$ und $F_1=F_2$ gesetzt. Wobei jedoch im Fall I die einzelnen Stäbe nur ein kleines Schlankheitsverhältnis $\left(\frac{l}{i}=\sqrt{500}=22{,}3607\right)$, dagegen im Fall II eine große Schlankheit $\left(\frac{l}{i}=100\right)$ besitzen.

Im Fall I erhalten demnach die Abkürzungen (11) die Zahlenwerte

$$\varrho=\frac{J_2\,\lambda}{J_1\,s}=\sqrt{2}\,;\quad \varrho_1=\frac{J_1}{F_2\,\lambda^2}=\frac{J_1}{F_1\,\lambda^2}=\frac{1}{500}=0{,}002\,;\quad \varrho_2=\frac{J_2}{F_2\,s^2}=\varrho_1\frac{\lambda^2}{s^2}=2\,\varrho_1=0{,}004\,;\quad \varrho_3=\frac{F_1}{F_2}=1\,,$$

und im Fall II wird

$$\varrho=\sqrt{2}\,;\quad \varrho_1=\frac{1}{100^2}=0{,}0001\,;\quad \varrho_2=2\,\varrho_1=0{,}0002\,;\quad \varrho_3=1\,.$$

Den Fall III erhält man aus den vorhergehenden als Grenzfall, indem man unter Beibehaltung von $\varrho=\sqrt{2}$ und $\varrho_3=1$ die Verhältnisse $\varrho_1=\varrho_2=0$ werden läßt. In diesem Fall zerfallen die Ausgangsgleichungen (2a) bis (6a) und somit auch ihre Systemdeterminante. In den drei letzten Ausgangsgleichungen (4a) bis (6a) und in den Kontrollgleichungen (7a) bis (10a) kommen nunmehr nur die unbekannten Knotenverschiebungen vor, und man erhält sie daraus unabhängig von den Knotendrehwinkeln, welche sodann aus den ersten zwei Ausgangsgleichungen (2a) bis (3a) in Abhängigkeit von den gefundenen Knotenverschiebungen bestimmt werden. Wir erhalten somit hier für diese Formänderungsgrößen bestimmte Grenzwerte, denen sie bei fest gegebenen und konstant bleibenden Abmessungsverhältnissen zwischen Gurt- und Diagonalstäben (ϱ, ϱ_3) mit überaus schlank werdenden Stäben ($\varrho_2\to 0$, $\varrho_1\to 0$) zustreben. Die Knotenverschiebungen werden dann identisch mit denjenigen eines idealen Fachwerkes mit gelenkig gedachten Stabanschlüssen, und die hier strenge Rechnung entspricht dem üblichen angenäherten Verfahren der Nebenspannungsermittlung, bei dem zu dem Verschiebungsplan eines idealen Fachwerkes die Knotendrehwinkel bestimmt werden.

Als Gegenstück zu den ersten drei Fällen mit gleichstarken Diagonal- und Gurtstäben wird im Fall IV ein Träger mit gegenüber den Gurten verhältnismäßig schwachen Diagonalen vorausgesetzt, und zwar wird $\frac{J_1}{J_2}=50$ und $\frac{F_1}{F_2}=5$ angenommen, wobei die Schlankheit der Gurtstäbe $\left(\frac{l}{i}=\sqrt{500}=22{,}3607\right)$ dieselbe bleibt wie in Fall I. Für die Verhältnisse (11) erhält man dann für Fall IV die Zahlenwerte

$$\varrho=\frac{J_2\,\lambda}{J_1\,s}=\frac{\sqrt{2}}{50}\,;\quad \varrho_3=\frac{F_1}{F_2}=5\,;\quad \varrho_1=\frac{J_1}{F_2\,\lambda^2}=\frac{J_1}{F_1\,\lambda^2}\cdot\frac{F_1}{F_2}=0{,}01\,;\quad \varrho_2=\frac{J_2}{F_2\,s^2}=\varrho_1\cdot\varrho\cdot\frac{\lambda}{s}=0{,}0004\,.$$

Ohne hier noch einen Fall mit einer größeren Schlankheit der Gurtstäbe einzuschalten, der mit Rücksicht auf Fall II und den letzten folgenden Fall V als überflüssig erschien, wird schließlich nur noch dieser letztere aus Fall IV mit $\varrho_1=\varrho_2=0$ gewonnene Grenzfall behandelt. Fall V entspricht demnach dem Fall III und unterscheidet sich jedoch von diesem durch die Verhältnisse $\varrho_3=5$ und $\varrho=\frac{\sqrt{2}}{50}$.

Der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_\nu &= a_0 + a_1\nu + a_2\nu^2 + a_3\nu^3 \\
\beta_\nu &= a_0' + a_1'\nu + a_2'\nu^2 + a_3'\nu^3 \\
\frac{u_\nu}{s} &= b_0 + b_1\nu + b_2\nu^2 + b_3\nu^3 \\
\frac{w_\nu}{s} &= c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + c_3\nu^3 + c_4\nu^4 \\
\frac{v_\nu}{s} &= c_0' + c_1'\nu + c_2'\nu^2 + c_3'\nu^3 + c_4'\nu^4
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

wird, wie bereits erwähnt, sowohl in die Ausgangsgleichungen (2a) bis (6a) als auch in die Kontrollgleichungen (7a) bis (10a) eingesetzt und die Konstanten a_0 bis c_4' durch Koeffizientenvergleich gefunden. Aus dieser einfachen Rechnung erhält man noch ganz allgemein, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{P\lambda^3}{48\,s\,h^2\,E\,F_1} = R_1 \quad \ldots \quad (15),$$

$$\frac{P_1\lambda^3}{12\,s\,h^2\,E\,F_1} = R_2 \quad \ldots \quad (16)$$

und

$$1 + \frac{\lambda^2}{h^2}\cdot\frac{\varrho_1}{\varrho_3} + \frac{\varrho_2}{\varrho_3}\,\frac{s\,\lambda}{h^2}\cdot\frac{2 + \frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1 + 3\,\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}} = \Phi \quad \ldots \quad (17)$$

setzt, die Konstanten

$$c_4 = c_4' = -\frac{R_1}{\Phi} \quad \ldots \quad (18),$$

$$c_3 = -\frac{R_2}{\Phi} \quad \ldots \quad (19)$$

und weiter die folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
c_3' &= c_3 + 2\,c_4 \\
a_3 &= a_3' = 4\,\frac{s}{\lambda}\,c_4 \\
b_3 &= 4\,\frac{h}{\lambda}\,c_4 \\
c_2' &= c_2 + \frac{3}{2}\,c_3 + \frac{18\,\varrho_2\frac{s^2}{h^2}}{1 + 3\,\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\,c_4 \\
a_2 &= 3\,\frac{s}{\lambda}\,c_3 \\
a_2' &= 3\,\frac{s}{\lambda}\,c_3' \\
b_2 &= 3\,\frac{h}{\lambda}\,c_3 \\
c_1' &= c_1 + c_2 - c_4 + \frac{9\,\varrho_2\frac{s^2}{h^2}}{1 + 3\,\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\,c_3' \\
c_0' &= c_0 + \frac{1}{2}\,c_1 - \frac{1}{4}\,c_3 + \frac{3\,\varrho_2\frac{s^2}{h^2}}{1 + 3\,\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\,c_2' - \mu\,c_4
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20),$$

wobei nur in der letzten Formel der Faktor μ beim letzten Glied einen Zahlenwert bedeutet, welcher erst nach Einsetzen der Zahlen gefunden worden ist. Auch die noch übrigen Kon-

stanten sind erst nach Einführung der Zahlenwerte für die einzelnen drei Fälle I, II und IV gesondert berechnet worden.

Dagegen lassen sich in den Grenzfällen III und V alle Konstanten allgemein ohne Einführung von Zahlen ausdrücken und man findet

$$\left.\begin{aligned}
c_4 &= c_4' = -R_1 \\
c_3 &= -R_2 \\
c_3' &= c_3 + 2c_4 \\
c_2 &= 2\left(1 - 12\,\varrho_3 \frac{s^3}{\lambda^3}\right) c_4 \\
c_2' &= c_2 + \frac{3}{2} c_3 \\
c_1' &= c_1 + c_2 - c_4 \\
c_0' &= c_0 + \frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{4} c_3 - 12 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3 c_4 \\
b_3 &= 4 \frac{h}{\lambda} c_4 \\
b_2 &= 3 \frac{h}{\lambda} c_3 \\
b_1 &= 2 \frac{h}{\lambda} c_4 \\
b_0 &= \frac{h}{\lambda} c_1 - \frac{h}{\lambda}\left(\frac{1}{2} - 12 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) c_3 \\
a_3 &= a_3' = 4 \frac{s}{\lambda} c_4 \\
a_2 &= 3 \frac{s}{\lambda} c_3 \\
a_2' &= 3 \frac{s}{\lambda} c_3' \\
a_1 &= 2 \frac{s}{\lambda} c_2 + \frac{6\varrho \frac{s}{\lambda}}{2+\varrho}\left(8 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3 - 1\right) c_4 \\
a_1' &= 2 \frac{s}{\lambda} c_2' + \left(6 \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{1+\varrho}{2+\varrho} + 48\,\varrho_3 \cdot \frac{3+\varrho}{2+\varrho} \cdot \frac{h^2 s^2}{\lambda^4}\right) c_4 \\
a_0 &= \frac{s}{\lambda} c_1 + \frac{3}{2} \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{\varrho}{2+\varrho}\left(8 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3 - 1\right) c_3 \\
a_0' &= \frac{s}{\lambda} c_1 + \left(12\,\varrho_3 \cdot \frac{3+\varrho}{2+\varrho} \cdot \frac{h^2 s^2}{\lambda^4} + \frac{3}{2} \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{1+\varrho}{2+\varrho}\right) c_3 \\
&\quad + \left[12 \frac{s^4}{\lambda^4} \varrho_3 - 9 \frac{s^2}{\lambda^2} \varrho_3 + \frac{5}{2} \frac{s}{\lambda} - \frac{3}{2} \frac{s}{\lambda} \frac{\varrho}{2+\varrho}\left(8\,\varrho_3 \frac{s h^2}{\lambda^3} - 1\right)\right] c_4
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (21).$$

Die obigen Formeln (21) stimmen mit den früher angegebenen (17) bis (20) überein, wenn man dort $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ setzt. Für den Zahlenfaktor μ erhält man hier den Ausdruck $12 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3$. Die Konstanten c_0 und c_1, die nur die Lage des Trägers als starre Scheibe festlegen, bleiben noch willkürlich.

Die homogene Lösung wird, wie bekannt[8]), mit Hilfe des Ansatzes

$$\gamma_\nu = A\,\zeta^\nu, \quad \beta_\nu = A'\,\zeta^\nu, \quad \frac{u_\nu}{s} = B\,\zeta^\nu, \quad \frac{w_\nu}{s} = C\,\zeta^\nu, \quad \frac{v_\nu}{s} = C'\,\zeta^\nu,$$

[8]) Bleich-Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin 1927, Springer.

den man in die Ausgangsgleichungen (2a) bis (6a) einführt, um die Systemdeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\zeta & 4 & -3\frac{h}{s}(1+\zeta) & \frac{3}{2}\frac{\lambda}{s}(1-\zeta) & 0 \\ \zeta^2+4(1+\varrho)\zeta+1 & \varrho(1+\zeta) & -6\varrho\frac{h}{s}\zeta & 3\frac{s}{\lambda}(1-\zeta^2) & \frac{3}{2}\varrho\frac{\lambda}{s}(1-\zeta) \\ 3\frac{\lambda}{s}\varrho_2(1-\zeta) & 0 & \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)(1-\zeta) & \left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)(1+\zeta) & -2\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right) \\ 6\varrho_1(1-\zeta^2) & 3\varrho_2\frac{\lambda}{s}(1-\zeta) & 0 & \left[12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\zeta^2-2\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\right)\zeta+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\right] & \left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)(1+\zeta) \\ -12\varrho_2\frac{h}{s}\zeta & -6\varrho_2\frac{h}{s}(1+\zeta) & \left[-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\zeta^2+2\left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3+\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\zeta-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\right] & 0 & \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)(1-\zeta) \end{vmatrix}$$

(Spalten: A, A', B, C, C')

zu erhalten, gewonnen. Die Werte ζ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\Delta=0$, die hier die Form

$$(\zeta-1)^4(\zeta^2+p\,\zeta+1)=0$$

annimmt, wobei der Zahlenwert p für die Grenzfälle III und V allgemein zu

$$p=\frac{16+14\,\varrho}{4-\varrho}$$

angegeben werden kann.

Die der vierfachen Einheitswurzel entsprechenden Konstanten sind bereits in der partikulären Lösung mitenthalten, so daß die homogene Lösung nur zwei noch unbekannte Konstanten enthält, zu deren Bestimmung sechs Randgleichungen zur Verfügung stehen, welche die drei Gleichgewichtsbedingungen an den beiden äußersten Knotenpunkten des unteren Gurtes $\nu=0$ und $\nu=n=14$ ausdrücken.

Am linken freien Ende des Trägers, Abb. 3, erhält man die erste Randgleichung aus dem Verschwinden der Momentensumme am äußersten Knotenpunkt des unteren Gurtes ($\nu=0$)

$$2(1+\varrho)\gamma_0+\gamma_1+\varrho\,\beta_0-3\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_1-w_0}{s}-3\varrho\frac{v_0-w_0}{s}\cdot\frac{\lambda}{2s}-3\varrho\frac{h}{s}\cdot\frac{u_0}{s}=0 \quad \ldots\ldots \quad (22),$$

die zweite folgt aus dem Gleichgewicht der zur Achse senkrechten Kräfte an demselben Knotenpunkt

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{w_0}{s}\left(\frac{h^2}{s^2}+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)+12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\frac{w_1}{s}+\frac{v_0}{s}\left(\frac{h^2}{s^2}+3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)-\frac{\lambda h}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{u_0}{s} \\ &\qquad -6\left(\varrho_1+\frac{\lambda}{2s}\varrho_2\right)\gamma_0-6\varrho_1\gamma_1-3\varrho_2\frac{\lambda}{s}\beta_0=\frac{P_1}{2EF_2}+\frac{P}{4EF_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23),$$

die dritte fließt aus dem Verschwinden aller Kräfte in Richtung der Trägerachse

$$-\left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3+\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_0}{s}+\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_1}{s}+\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{v_0}{s}-\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{w_0}{s}+6\varrho_2\frac{h}{s}\beta_0+6\varrho_2\frac{h}{s}\gamma_0=0 \quad (24).$$

$$\left.\begin{aligned} M_{r\nu}{}^0 = &-\frac{Q_\nu\lambda}{4\phi}\cdot\frac{3\varrho}{2+\varrho}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1 h^2}+\frac{M_\nu}{2\phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1 h^2} \\ &-\frac{P_\nu\lambda}{4\phi}\varrho\left[\frac{5}{12}+2\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{3s}{2\lambda}\varrho_3+\frac{6-\varrho}{4(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\frac{\frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(12\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\right]\frac{J_1}{F_1 h^2}\end{aligned}\right\}\quad(33),$$

$$\left.\begin{aligned} M_{l\nu}{}^0 = &-\frac{Q_\nu\lambda}{4\phi}\cdot\frac{3\varrho}{2+\varrho}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1 h^2}-\frac{M_\nu}{2\phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1 h^2} \\ &+\frac{P_\nu\lambda}{4\phi}\varrho\left[\frac{5}{12}+2\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{3s}{2\lambda}\varrho_3-\frac{6+\varrho}{4(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\frac{\frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(12\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\right]\frac{J_1}{F_1 h^2}\end{aligned}\right\}\quad(34),$$

$$\left.\begin{aligned} M_{l\nu}{}' = -M_{r\nu}{}' = &\frac{Q_\nu\lambda}{2\phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{4}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1 h^2}+\frac{M_\nu}{\phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{4}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1 h^2} \\ &+\frac{P_\nu\lambda}{4\phi}\varrho\left[\frac{1}{6}-4\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{\varrho}{2(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\left(\frac{1}{4}+2\frac{h^2}{\lambda^2}-6\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right]\frac{J_1}{F_1 h^2}\end{aligned}\right\}\quad(35).$$

Die Vorzeichen von Q_ν, M_ν und P_ν sind die üblichen und aus Abb. 7 ersichtlich. Die Gleichgewichtsgleichung $M_{r\nu}{}'' + M_{l\nu}{}'' + M_{l\nu}{}^0 + M_{r\nu}{}^0 = 0$ ist befriedigt.

Mit derselben Annäherung findet man, daß die Berechnung der Knotenverschiebungen w_ν, d. h. der Ordinaten der Gurtbiegungslinie, genau so erfolgen kann wie beim Vollwandträger, wenn man dabei den Einfluß der Querkräfte mit berücksichtigt. Es muß nur an Stelle des Trägheitsmomentes J die entsprechende Größe

$$2\,F_1\,h^2\,\phi \quad\quad (36)$$

und für die Steifigkeit $\frac{G\,F}{k}$ bei Berücksichtigung der Querkräfte die Größe

$$E\,F_2\,\frac{\lambda\,h^2}{s^3}\,\phi\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda^3}{24\,s^3\,\varrho_3}} \quad\quad (37)$$

gesetzt werden. Gl. (37) gilt hierbei für eine Einzellast; bei ihrer Anwendung auf eine verteilte Last ist der letzte Faktor $\frac{1}{1-\frac{\lambda^3}{24\,s^3\,\varrho_3}}$ wegzulassen.

4. Der symmetrische Fall (Abb. 4). Als unbekannte Formänderungsgrößen treten der Knotendrehwinkel γ, die Knotenverschiebungen u und w in Richtung und senkrecht zur Trägerachse am unteren Gurt und die Knotenverschiebung u' in Richtung der Trägerachse an den Kreuzungsknoten der Diagonalen auf. Der Richtungssinn dieser Größen ist durch das in Abb. 4 angedeutete Achsenkreuz festgelegt. Der Knotendrehwinkel β und die Knotenverschiebung v an den Kreuzungsknoten der Diagonalen müssen aus Symmetriegründen verschwinden.

In genau derselben Weise und mit denselben Abkürzungen (11), wie im vorhergehenden Fall, erhält man nun für die vier Unbekannten γ_ν, $\frac{u_\nu}{s}$, $\frac{w_\nu}{s}$, $\frac{u_\nu{}'}{s}$ das folgende Ausgangs-

gleichungssystem: aus der Momentengleichgewichtsbedingung am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\gamma_{\nu-1} + 4(1+\varrho)\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} - 3\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_{\nu+1}-w_{\nu-1}}{s} + 3\frac{h}{s}\varrho\frac{u_\nu' + u_{\nu-1}'}{s} - 6\frac{h}{s}\varrho\frac{u_\nu}{s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (38),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Trägerachse am Kreuzungsknoten ν der Diagonalen

$$\frac{h\lambda}{2s^2}\left(1-12\varrho_2\right)\frac{w_\nu - w_{\nu+1}}{s} + \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu + u_{\nu+1}}{s} - \left(\frac{\lambda^2}{2s^2} + 24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s} - 6\frac{h}{s}\varrho_2(\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1}) = 0 \quad (39),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte senkrecht zur Trägerachse am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\left.\begin{aligned} -\left(2\frac{h^2}{s^2} + 24\frac{s}{\lambda}\varrho_1 + 6\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{w_\nu}{s} + 12\frac{s}{\lambda}\varrho_1\frac{w_{\nu-1}+w_{\nu+1}}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{u_\nu' - u_{\nu-1}'}{s} \\ + 6\varrho_1(\gamma_{\nu-1} - \gamma_{\nu+1}) = \frac{P}{2EF_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (40),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Trägerachse am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\left(\frac{\lambda^2}{2s^2} + 2\frac{s}{\lambda}\varrho_3 + 24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s} - \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu' + u_{\nu-1}'}{s} - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_{\nu-1}+u_{\nu+1}}{s} - 12\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_\nu = 0 \quad (41).$$

Ebenso findet man nun aus dem Gleichgewicht aller Längskräfte am ganzen links abgeschnittenen Trägerteil, je nachdem der Schnitt nach Abb. 5 oder Abb. 6 geführt wird, die beiden Kontrollgleichungen

$$\left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3 + \frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_{\nu+1}}{s} - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_\nu}{s} - \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s} - \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{w_{\nu+1}}{s} - 6\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_{\nu+1} = 0 \quad (42),$$

$$\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_{\nu+1}}{s} - \left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3 + \frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s} + \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s} - \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{w_\nu}{s} + 6\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_\nu = 0 \quad (43)$$

und an Stelle der Beziehungen (12) hat man nun

$$\left.\begin{aligned} (42)_\nu - (43)_\nu &= (39)_\nu \\ (42)_{\nu-1} - (43)_\nu &= (41)_\nu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Der partikuläre Teil der Lösung vereinfacht sich im vorliegenden Fall, indem fast alle Konstanten bis auf b_0, b_0', b_1, b_1' und c_0 verschwinden, und erhält die Form

$$\frac{u_\nu}{s} = b_0 + b_1\nu; \quad \frac{w_\nu}{s} = c_0; \quad \frac{u_\nu'}{s} = b_0' + b_1'\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

wobei die Konstanten mit Berücksichtigung der Kontrollgleichungen (42) und (43) sich ganz allgemein ausdrücken lassen. Man erhält für alle angeführten Fälle

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \frac{P}{2EF_1}\cdot\frac{\varrho_3\left(1 + 8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3 + 48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)}{2\frac{h^2}{s^2}\left[(1-12\varrho_2)^2 - \left(1 + 3\frac{\lambda^2}{h^2}\varrho_2\right)\left(1 + 8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3 + 48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)\right]} \\ b_1 = b_1' &= \frac{P}{2EF_1}\cdot\frac{\varrho_3(1-12\varrho_2)}{\frac{h\lambda}{2s^2}\left[(1-12\varrho_2)^2 - \left(1 + 3\frac{\lambda^2}{h^2}\varrho_2\right)\left(1 + 8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3 + 48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)\right]} \\ b_0' - b_0 &= \frac{1}{2}b_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die Konstante b_0, welche nur für die Lage des Trägers als starres Gebilde maßgebend ist, bleibt noch frei wählbar.

Am rechten Auflagerende des Trägers erhält man die entsprechenden drei Gleichungen für den äußersten Knotenpunkt ($\nu = n = 14$) des unteren Gurtes, Abb. 3, in derselben Reihenfolge

$$2(1+\varrho)\gamma_n + \gamma_{n-1} + \varrho\beta_{n-1} - 3\frac{s}{\lambda}\frac{w_n - w_{n-1}}{s} - 3\varrho\frac{w_n - v_{n-1}}{s}\frac{\lambda}{2s} - 3\varrho\frac{h}{s}\frac{u_n}{s} + \frac{3\lambda J_h}{2hJ_1}\left(\gamma_n - \frac{s}{h}\cdot\frac{u_n}{s}\right) = 0 \quad (25),$$

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{h^2}{s^2} + 12\varrho_1\frac{s}{\lambda} + 3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{w_n}{s} + 12\varrho_1\frac{s}{\lambda}\frac{w_{n-1}}{s} + \left(\frac{h^2}{s^2} + 3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{v_{n-1}}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2)\frac{u_n}{s} \\ +6\left(\varrho_1 + \frac{\lambda}{2s}\varrho_2\right)\gamma_n + 6\varrho_1\gamma_{n-1} + 3\frac{\lambda}{s}\varrho_2\beta_{n-1} = -\frac{P_1}{2EF_2} - \frac{P\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2EF_2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (26),$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3 + \frac{\lambda^2}{4s^2} + 12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_n}{s} - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_{n-1}}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2)\frac{v_{n-1}}{s} - \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2)\frac{w_n}{s} - 6\varrho_2\frac{h}{s}\beta_{n-1} \\ -6\varrho_2\frac{h}{s}\gamma_n - \frac{3J_h}{F_2h^2}\left(\gamma_n - \frac{s}{h}\frac{u_n}{s}\right) = -\frac{P_1 n\lambda}{2EF_2h} - \frac{Pn^2\lambda}{4EF_2h} \end{aligned}\right\} \quad (27),$$

wobei J_h für das Trägheitsmoment des Schlußriegels, Abb. 3, gesetzt worden ist.

An dieser Stelle werden die anfangs erwähnten weiteren Unterfälle eingeführt; der Fall $J_h = 0$, bei dem der Riegel fehlt; die Fälle $J_h = J_1$ bzw. $J_h = J_2$, bei denen der Riegel gleichstark einem Gurt- oder Diagonalstabe ist, und der Fall $J_h = \infty$ für einen starren Riegel, was mit einer Führung der rechten Enden gleichbedeutend ist. Sodann noch der Fall, daß am linken freien Ende ein starrer Riegel angebracht wird.

Für den Fall $J_h = \infty$ am Auflagerende tritt an Stelle der Gl. (25) die einfachere

$$\gamma_n - \frac{s}{h}\cdot\frac{u_n}{s} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25a),$$

und in Gl. (27) muß vor dem Grenzübergang das letzte Glied $\left(\gamma_n - \frac{s}{h}\cdot\frac{u_n}{s}\right)$ erst aus Gl. (25) eingesetzt werden, d. h. an Stelle der Gl. (27) tritt die Gleichung

$$(27) + 2\varrho_1\frac{\lambda}{h}(25) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27a).$$

Für den Fall eines Riegels am freien Ende kommt in Gl. (22) noch das Glied $\frac{3\lambda J_h}{2hJ_1}\left(\gamma_0 - \frac{u_0}{h}\right)$ oder mit $2h = \lambda$ das Glied $3\frac{J_h}{J_1}\left(\gamma_0 - 2\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{u_0}{s}\right)$ hinzu. Gl. (23) bleibt unverändert. In Gl. (24) kommt noch das Glied $\frac{12J_h}{(2h)^2F_2}\left(\gamma_0 - \frac{u_0}{h}\right)$ oder $\frac{12J_h}{F_2\lambda^2}\left(\gamma_0 - 2\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{u_0}{s}\right)$ hinzu. Für den starren Riegel am freien Ende tritt an Stelle der Gl. (22) die Gleichung

$$\gamma_0 - 2\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{u_0}{s} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22a)$$

und in Gl. (24) muß vor dem Grenzübergang erst das hinzugetretene Glied $\frac{12J_h}{F_2\lambda^2}\left(\gamma_0 - 2\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{u_0}{s}\right)$ aus Gl. (22) eingesetzt werden in derselben Weise wie am Auflagerende.

Von den sechs angeschriebenen Randgleichungen sind die Gl. (23) und (26) identisch erfüllt, da sie den Kontrollgleichungen (7) und (8) entsprechen, welche ebenso wie die übrigen Kontrollgleichungen keine von den Normalgleichungen abweichende Randgleichungen besitzen. Sie scheiden also für die Festlegung der beiden Konstanten aus und dienen nur zur Prüfung der Zahlenrechnung. Weiter sind die Gl. (22) und (24) und entsprechend (25) und (27) voneinander abhängig infolge der früher angegebenen Beziehungen (12), so daß schließlich für die zwei unbekannten Konstanten auch nur zwei unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen. Die Größenordnung der Beiwerte in den Randgleichungen des linken und rechten Trägerendes ist so verschieden, daß sie gegeneinander vernachlässigt werden können, so daß aus Gl. (22) oder (24) die eine Konstante und aus Gl. (25) oder (27) die andere Konstante unabhängig voneinander gefunden werden, wobei die gesonderte Ermittlung ein und derselben Konstanten aus den beiden entsprechenden Gleichungen zur Zahlenkontrolle dient.

Nach Ermittlung sämtlicher Konstanten der beiden Lösungsansätze bis auf die noch übriggebliebenen willkürlichen Konstanten c_0 und c_1 der partikulären Lösung, die nur die

Lage des Trägers als starre Scheibe relativ zum angenommenen Achsenkreuz festlegen, können die letzteren für die Lagerung, Abb. 3, etwa aus den Bedingungen $\frac{u_n}{s} = 0$ und $\frac{w_n}{s} = 0$ bestimmt werden.

Geschlossene Formeln für die Ermittlung der genauen Stabkräfte und der Zusatzmomente. Für die praktische Anwendung wird aus den Teilen der strengen Lösung eine angenäherte mit geschlossenen Formeln wie folgt konstruiert. Unter Verzicht auf die homogene Lösung wird nur die partikuläre beibehalten, wobei die wichtigeren Glieder derselben dem allgemeinen Fall, Gl. (15) bis (20), dagegen die unwichtigeren, die dort nicht mehr explizite ausgedrückt werden konnten, aus dem Grenzfall, Gl. (21), entnommen werden.

Nach Einsetzen dieser Konstanten in den Ansatz (14) erhält man die Formänderungsgrößen und unter Anwendung der Beziehungen (1) die folgenden Formeln für die Kraftgrößen.

Für die Normalkraft im Untergurtstab $\nu, \nu+1$

$$U_{\nu,\,\nu+1} = \frac{M_\nu{}^m}{2\,h\,\phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

wo $M_\nu{}^m$ das Moment der äußeren Kräfte bezogen auf den Kreuzungspunkt ν der Diagonalen bedeutet, Abb. 3.

Für die im Kreuzungspunkt ν sich schneidenden Diagonalen der unteren Trägerhälfte und zwar für die linkssteigende Diagonale $D_{\nu,\,\nu+1}$

$$D_{\nu,\,\nu+1} = \frac{Q_\nu}{2\phi}\,\frac{s}{h} + \frac{M_\nu{}^m}{2\,h\,\phi}\cdot\frac{\frac{3}{2}\,\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\,\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\,\varrho_2\,\frac{\lambda^2}{h^2}} + \frac{P_\nu}{2\phi}\,\frac{s}{h}\cdot\frac{3\,\varrho_2\,\frac{s^2}{h^2}}{1+3\,\varrho_2\,\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(1-\frac{\lambda^3}{48\,\varrho_3\,s^3}\right) \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

und für die rechtssteigende Diagonale $D_{\nu,\,\nu}$

$$D_{\nu,\,\nu} = -\frac{Q_\nu}{2\phi}\,\frac{s}{h} + \frac{M_\nu{}^m}{2\,h\,\phi}\cdot\frac{\frac{3}{2}\,\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\,\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\,\varrho_2\,\frac{\lambda^2}{h^2}} + \frac{P_\nu}{2\phi}\,\frac{s}{h}\cdot\frac{3\,\varrho_2\,\frac{s^2}{h^2}}{1+3\,\varrho_2\,\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(1-\frac{\lambda^3}{48\,\varrho_3\,s^3}\right) \quad \ldots\ldots \quad (30),$$

Abb. 7. Momentenbezeichnung: r-echts, l-inks, o-ben, u-nten bezogen auf den Knotenpunkt ν.

wo Q_ν die Querkraft im Felde $\nu, \nu+1$ und P_ν die Knotenlast am Knotenpunkt ν des Gurtes bedeuten. Für die Biegungsmomente an den Stabenden infolge der Knotensteifigkeit erhält man mit der Bezeichnung nach Abb. 7 die folgenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} M_{r_\nu}{}^u = {} & \frac{Q_\nu\,\lambda}{4\,\phi}\cdot\frac{3\,\varrho}{2+\varrho}\left(8\,\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\,\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2} - \frac{M_\nu}{2\,\phi}\,\frac{J_1}{F_1\,h^2} \\ & -\frac{P_\nu\,\lambda}{\phi}\left[\frac{s^3}{\lambda^3}\,\varrho_3 - \frac{\varrho}{8\,(2+\varrho)}\left(8\,\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\,\varrho_3-1\right)-\frac{1}{24}\right]\frac{J_1}{F_1\,h^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31),$$

wo M_ν das Moment bezogen auf den Knotenpunkt ν des Gurtes bedeutet

$$\left.\begin{aligned} M_{l_\nu}{}^u = {} & \frac{Q_\nu\,\lambda}{4\,\phi}\cdot\frac{3\,\varrho}{2+\varrho}\left(8\,\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\,\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2} + \frac{M_\nu}{2\,\phi}\,\frac{J_1}{F_1\,h^2} \\ & +\frac{P_\nu\,\lambda}{\phi}\left[\frac{s^3}{\lambda^3}\,\varrho_3 + \frac{5\,\varrho}{8\,(2+\varrho)}\left(8\,\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\,\varrho_3-1\right)-\frac{1}{24}\right]\frac{J_1}{F_1\,h^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (32),$$

$$\left.\begin{aligned} M_{r\nu}{}^0 = & -\frac{Q_\nu\,\lambda}{4\,\Phi}\cdot\frac{3\,\varrho}{2+\varrho}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2}+\frac{M_\nu}{2\,\Phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2} \\ & -\frac{P_\nu\,\lambda}{4\,\Phi}\varrho\left[\frac{5}{12}+2\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{3\,s}{2\,\lambda}\varrho_3+\frac{6-\varrho}{4\,(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\frac{\frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(12\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\right]\frac{J_1}{F_1\,h^2} \end{aligned}\right\} \quad (33),$$

$$\left.\begin{aligned} M_{l\nu}{}^0 = & -\frac{Q_\nu\,\lambda}{4\,\Phi}\cdot\frac{3\,\varrho}{2+\varrho}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2}-\frac{M_\nu}{2\,\Phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2} \\ & +\frac{P_\nu\,\lambda}{4\,\Phi}\varrho\left[\frac{5}{12}+2\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{3\,s}{2\,\lambda}\varrho_3-\frac{6+\varrho}{4\,(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\frac{\frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\left(12\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)\right]\frac{J_1}{F_1\,h^2} \end{aligned}\right\} \quad (34),$$

$$\left.\begin{aligned} M_{l\nu}{}' = -M_{r\nu}{}' = & \frac{Q_\nu\,\lambda}{2\,\Phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{4}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2}+\frac{M_\nu}{\Phi}\varrho\left(1-\frac{\frac{9}{4}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right)\frac{J_1}{F_1\,h^2} \\ & +\frac{P_\nu\,\lambda}{4\,\Phi}\varrho\left[\frac{1}{6}-4\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+\frac{\varrho}{2\,(2+\varrho)}\left(8\frac{s\,h^2}{\lambda^3}\varrho_3-1\right)+\left(\frac{1}{4}+2\frac{h^2}{\lambda^2}-6\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1+3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}\right]\frac{J_1}{F_1\,h^2} \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Die Vorzeichen von Q_ν, M_ν und P_ν sind die üblichen und aus Abb. 7 ersichtlich. Die Gleichgewichtsgleichung $M_{r\nu}{}'' + M_{l\nu}{}'' + M_{l\nu}{}^0 + M_{r\nu}{}^0 = 0$ ist befriedigt.

Mit derselben Annäherung findet man, daß die Berechnung der Knotenverschiebungen w_ν, d. h. der Ordinaten der Gurtbiegungslinie, genau so erfolgen kann wie beim Vollwandträger, wenn man dabei den Einfluß der Querkräfte mit berücksichtigt. Es muß nur an Stelle des Trägheitsmomentes J die entsprechende Größe

$$2\,F_1\,h^2\,\Phi \quad \ldots \quad (36)$$

und für die Steifigkeit $\frac{G\,F}{k}$ bei Berücksichtigung der Querkräfte die Größe

$$E\,F_2\,\frac{\lambda\,h^2}{s^3}\,\Phi\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda^3}{24\,s^3\,\varrho_3}} \quad \ldots \quad (37)$$

gesetzt werden. Gl. (37) gilt hierbei für eine Einzellast; bei ihrer Anwendung auf eine verteilte Last ist der letzte Faktor $\frac{1}{1-\frac{\lambda^3}{24\,s^3\,\varrho_3}}$ wegzulassen.

4. Der symmetrische Fall (Abb. 4). Als unbekannte Formänderungsgrößen treten der Knotendrehwinkel γ, die Knotenverschiebungen u und w in Richtung und senkrecht zur Trägerachse am unteren Gurt und die Knotenverschiebung u' in Richtung der Trägerachse an den Kreuzungsknoten der Diagonalen auf. Der Richtungssinn dieser Größen ist durch das in Abb. 4 angedeutete Achsenkreuz festgelegt. Der Knotendrehwinkel β und die Knotenverschiebung v an den Kreuzungsknoten der Diagonalen müssen aus Symmetriegründen verschwinden.

In genau derselben Weise und mit denselben Abkürzungen (11), wie im vorhergehenden Fall, erhält man nun für die vier Unbekannten γ_ν, $\frac{u_\nu}{s}$, $\frac{w_\nu}{s}$, $\frac{u_\nu'}{s}$ das folgende Ausgangs-

gleichungssystem: aus der Momentengleichgewichtsbedingung am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\gamma_{\nu-1}+4(1+\varrho)\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1}-3\frac{s}{\lambda}\cdot\frac{w_{\nu+1}-w_{\nu-1}}{s}+3\frac{h}{s}\varrho\frac{u_\nu'+u_{\nu-1}'}{s}-6\frac{h}{s}\varrho\frac{u_\nu}{s}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (38),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Trägerachse am Kreuzungsknoten ν der Diagonalen

$$\frac{h\lambda}{2s^2}\left(1-12\varrho_2\right)\frac{w_\nu-w_{\nu+1}}{s}+\left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu+u_{\nu+1}}{s}-\left(\frac{\lambda^2}{2s^2}+24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s}-6\frac{h}{s}\varrho_2(\gamma_\nu+\gamma_{\nu+1})=0 \quad (39),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte senkrecht zur Trägerachse am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\left.\begin{aligned}-\left(2\frac{h^2}{s^2}+24\frac{s}{\lambda}\varrho_1+6\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{w_\nu}{s}+12\frac{s}{\lambda}\varrho_1\frac{w_{\nu-1}+w_{\nu+1}}{s}+\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{u_\nu'-u_{\nu-1}'}{s}\\+6\varrho_1(\gamma_{\nu-1}-\gamma_{\nu+1})=\frac{P}{2EF_2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (40),$$

aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Trägerachse am Knotenpunkt ν des unteren Gurtes

$$\left(\frac{\lambda^2}{2s^2}+2\frac{s}{\lambda}\varrho_3+24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s}-\left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'+u_{\nu-1}'}{s}-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_{\nu-1}+u_{\nu+1}}{s}-12\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_\nu=0 \quad (41).$$

Ebenso findet man nun aus dem Gleichgewicht aller Längskräfte am ganzen links abgeschnittenen Trägerteil, je nachdem der Schnitt nach Abb. 5 oder Abb. 6 geführt wird, die beiden Kontrollgleichungen

$$\left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3+\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_{\nu+1}}{s}-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_\nu}{s}-\left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s}-\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{w_{\nu+1}}{s}-6\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_{\nu+1}=0 \quad (42),$$

$$\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{u_{\nu+1}}{s}-\left(\frac{s}{\lambda}\varrho_3+\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu}{s}+\left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{u_\nu'}{s}-\frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)\frac{w_\nu}{s}+6\frac{h}{s}\varrho_2\gamma_\nu=0 \quad (43)$$

und an Stelle der Beziehungen (12) hat man nun

$$\left.\begin{aligned}(42)_\nu-(43)_\nu&=(39)_\nu\\(42)_{\nu-1}-(43)_\nu&=(41)_\nu\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Der partikuläre Teil der Lösung vereinfacht sich im vorliegenden Fall, indem fast alle Konstanten bis auf b_0, b_0', b_1, b_1' und c_0 verschwinden, und erhält die Form

$$\frac{u_\nu}{s}=b_0+b_1\nu;\qquad\frac{w_\nu}{s}=c_0;\qquad\frac{u_\nu'}{s}=b_0'+b_1'\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

wobei die Konstanten mit Berücksichtigung der Kontrollgleichungen (42) und (43) sich ganz allgemein ausdrücken lassen. Man erhält für alle angeführten Fälle

$$\left.\begin{aligned}c_0&=\frac{P}{2EF_1}\cdot\frac{\varrho_3\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)}{2\frac{h^2}{s^2}\left[(1-12\varrho_2)^2-\left(1+3\frac{\lambda^2}{h^2}\varrho_2\right)\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)\right]}\\b_1=b_1'&=\frac{P}{2EF_1}\cdot\frac{\varrho_3(1-12\varrho_2)}{\frac{h\lambda}{2s^2}\left[(1-12\varrho_2)^2-\left(1+3\frac{\lambda^2}{h^2}\varrho_2\right)\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)\right]}\\b_0'-b_0&=\frac{1}{2}b_1\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die Konstante b_0, welche nur für die Lage des Trägers als starres Gebilde maßgebend ist, bleibt noch frei wählbar.

Mit dem Ansatz für die homogene Lösung

$$\gamma_\nu = A\,\zeta^\nu\,, \quad \frac{u_\nu}{s} = B\,\zeta^\nu\,, \quad \frac{u_\nu'}{s} = B'\,\zeta^\nu\,, \quad \frac{w_\nu}{s} = C\,\zeta^\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

erhält man für die Systemdeterminante der Gl. (38) bis (41)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & B' & C \\ 1+4(1+\varrho)\zeta+\zeta^2 & -6\varrho\frac{h}{s}\zeta & 3\varrho\frac{h}{s}(\zeta+1) & -3\frac{s}{\lambda}(\zeta^2-1) \\ -6\frac{h}{s}\varrho_2(1+\zeta) & \left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)(1+\zeta) & -\left(\frac{\lambda^2}{2s^2}+24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right) & \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)(1-\zeta) \\ -6\varrho_1(\zeta^2-1) & 0 & \frac{h\lambda}{2s^2}(1-12\varrho_2)(\zeta-1) & \left[12\frac{s}{\lambda}\varrho_1\zeta^2-\left(2\frac{h^2}{s^2}+24\frac{s}{\lambda}\varrho_1+6\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\zeta+12\frac{s}{\lambda}\varrho_1\right] \\ -12\frac{h}{s}\varrho_2\zeta & \left[-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\zeta^2+\left(\frac{\lambda^2}{2s^2}+2\varrho_3\frac{s}{\lambda}+24\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)\zeta-\frac{s}{\lambda}\varrho_3\right] & -\left(\frac{\lambda^2}{4s^2}+12\frac{h^2}{s^2}\varrho_2\right)(1+\zeta) & 0 \end{vmatrix}$$

und für die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ die Form

$$(\zeta-1)^2(\zeta^4+p\,\zeta^3+q\,\zeta^2+p\,\zeta+1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

wobei die der Einheitswurzel zugeordneten Konstanten mit denen der partikulären Lösung identisch sind.

In den Grenzfällen III und V zerfällt auch hier das Ausgangsgleichungssystem (38) bis (41), indem in den letzten drei Gl. (39) bis (41) und auch in den Kontrollgleichungen (42) (43) nur die unbekannten Knotenverschiebungen verbleiben. Für die Systemdeterminante und die charakteristische Gleichung dieser drei letzten Gl. (39) bis (41) erhält man für beide Grenzfälle

$$\Delta = -\frac{\sqrt{2}}{8}\varrho_3(\zeta-1)^2(\zeta+1)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Die der ersten Doppelwurzel $\zeta = 1$ entsprechenden Lösungsglieder sind wie vorher identisch mit denen der partikulären Lösung (46). Der zweiten Doppelwurzel $\zeta = -1$ ist die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_\nu}{s} &= B_1(-1)^\nu \\ \frac{u_\nu'}{s} &= B_1'(-1)^\nu + B_2'\,\nu\,(-1)^\nu \\ \frac{w_\nu}{s} &= C_1(-1)^\nu + C_2\,\nu\,(-1)^\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

zugeordnet mit den Beziehungen zwischen den Konstanten

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\lambda}{2h}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)B_1 + \frac{\lambda}{2h}B_1' \\ C_2 &= \frac{\lambda}{h}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)B_1 \\ B_2' &= 2\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)B_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51).$$

Der Knotendrehwinkel γ_ν kommt nur in der ersten Gl. (38) vor und wird aus dieser nach Einführung der gefundenen Knotenverschiebungen gewonnen, welche somit nun als

Störungsglieder aufzufassen sind und in diesem Sinne zur partikulären Lösung für den Knotendrehwinkel

$$\gamma_\nu = A_0 (-1)^\nu \qquad \text{. . . . . (52)}$$

mit

$$A_0 = -3 \frac{s}{h} \cdot \frac{1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3 + 8 \frac{s\,h^2}{\lambda^3} \varrho\, \varrho_3}{1 + 2\varrho} B_1 \qquad \text{. . . . . (53)}$$

führen. Die homogene Lösung für den Knotendrehwinkel wird in diesen Grenzfällen aus dem Ansatz wie (47)

$$\gamma_\nu = A_1 \zeta_1^\nu + A_2 \zeta_2^\nu \qquad \text{. . . . . (54)}$$

mit der aus Gl. (38) fließenden charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 4(1+\varrho)\zeta + 1 = 0$$

gefunden. —

Zur Bestimmung der vier Konstanten der homogenen Lösung haben wir wieder sechs Randgleichungen, je drei an jedem Ende, welche die drei Gleichgewichtsbedingungen an den beiden äußersten Knotenpunkten $\nu = 0$ und $\nu = n$ des unteren Gurtes ausdrücken.

Die erste Gleichung am linken Ende, Abb. 4, folgt aus dem Gleichgewicht der Momente am Knotenpunkt $\nu = 0$ des unteren Gurtes

$$\gamma_1 + 2(1+\varrho)\gamma_0 - 3 \frac{s}{\lambda} \frac{w_1}{s} + 3\left(\frac{s}{\lambda} + \frac{\lambda}{2s}\varrho\right) \frac{w_0}{s} + 3\varrho \frac{h}{s} \cdot \frac{u_0' - u_0}{s} = 0 \qquad \text{. . . . . . . (55),}$$

die zweite aus dem Gleichgewicht der Kräfte senkrecht zur Trägerachse

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{h^2}{s^2} + 12 \frac{s}{\lambda} \varrho_1 + 3 \frac{\lambda^2}{s^2} \varrho_2\right) \frac{w_0}{s} + 12 \frac{s}{\lambda} \varrho_1 \frac{w_1}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2) \frac{u_0' - u_0}{s} - \left(6\varrho_1 + 3\frac{\lambda}{s}\varrho_2\right)\gamma_0 - 6\varrho_1\gamma_1 \\ = \frac{P}{4EF_2} + \frac{P_1}{2EF_2} \end{aligned}\right\} \text{(56),}$$

die dritte aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Trägerachse

$$\left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12 \frac{h^2}{s^2} \varrho_2 + \frac{s}{\lambda} \varrho_3\right) \frac{u_0}{s} - \frac{s}{\lambda} \varrho_3 \frac{u_1}{s} - \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12 \frac{h^2}{s^2} \varrho_2\right) \frac{u_0'}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2) \frac{w_0}{s} - 6 \frac{h}{s} \varrho_2 \gamma_0 = 0 \quad \text{(57).}$$

Am rechten Ende hat man die entsprechenden Gleichungen in derselben Reihenfolge

$$\gamma_{n-1} + 2(1+\varrho)\gamma_n - 3\left(\frac{s}{\lambda} + \frac{\lambda}{2s}\varrho\right) \frac{w_n}{s} + 3 \frac{s}{\lambda} \frac{w_{n-1}}{s} - 3\varrho \frac{h}{s} \frac{u_n - u_{n-1}'}{s} + \frac{\lambda}{2h} \frac{J_h}{J_1} \gamma_n = 0 \quad \text{. . . (58),}$$

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{h^2}{s^2} + 12 \frac{s}{\lambda} \varrho_1 + 3 \frac{\lambda^2}{s^2} \varrho_2\right) \frac{w_n}{s} + 12 \frac{s}{\lambda} \varrho_1 \frac{w_{n-1}}{s} + \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2) \frac{u_n - u_{n-1}'}{s} + 6\left(\varrho_1 + \frac{\lambda}{2s}\varrho_2\right)\gamma_n \\ + 6\varrho_1\gamma_{n-1} - \frac{sF_h}{hF_2} \frac{w_n}{s} = \frac{P}{4EF_2} + \frac{P_3}{2EF_2} \end{aligned}\right\} \text{(59),}$$

$$\left(\frac{s}{\lambda} \varrho_3 + \frac{\lambda^2}{4s^2} + 12 \frac{h^2}{s^2} \varrho_2\right) \frac{u_n}{s} - \frac{s}{\lambda} \varrho_3 \frac{u_{n-1}}{s} - \left(\frac{\lambda^2}{4s^2} + 12 \frac{b^2}{s^2} \varrho_2\right) \frac{u_{n-1}'}{s} - \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2) \frac{w_n}{s} - 6 \frac{h}{s} \varrho_2 \gamma_n = 0 \quad \text{(60).}$$

Die zwei Randgleichungen (57) und (60) schalten aus, da sie identisch erfüllt sind, indem sie den Normalgleichungen des Kontrollgleichungssystems (43) und (42) vollkommen entsprechen und nur zur Kontrolle dienen, so daß vier Gleichungen zur Berechnung der vier Konstanten zurückbleiben.

Für den Unterfall des starren Schlußriegels ($J_h = \infty$, $F_h = \infty$) tritt an Stelle der Gl. (58)

$$\gamma_n = 0 \qquad \text{. . . . . (58a)}$$

und für die Gl. (59)

$$\frac{w_n}{s} = 0 \qquad \text{. . . . . (59a).}$$

Für den Fall, daß die rechten Enden geführt sind ($J_h = \infty$, $F_h = 0$) tritt an Stelle der Gl. (58) die Gl. (58a) wie vorhin, jedoch wird in Gl. (59) nur $F_h = 0$ gesetzt.

Für die Grenzfälle III und V mit den zugehörigen Unterfällen lassen sich die Konstanten der homogenen Lösung (50) sogar ganz allgemein und explizite angeben. Aus der Randgleichung (56) findet man

$$B_1 = \frac{P_1}{8EF_1}\frac{\lambda^2}{sh} \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

und aus der Randgleichung (59)

$$B_1' = -\frac{2n-1}{8}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^2}{EF_1 sh} - \frac{P_1+P_3(-1)^n}{EF_h}\cdot\frac{h^2}{\lambda s} - \frac{2h}{\lambda}(-1)^n c_0 \quad \ldots \quad (62).$$

Mit Berücksichtigung der Beziehungen (51) und (53) erhält man die übrigen Konstanten

$$B_2' = \left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^2}{4EF_1 sh} \quad \ldots \ldots \quad (63),$$

$$C_2 = \left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^3}{8EF_1 sh^2} \quad \ldots \ldots \quad (64),$$

$$C_1 = -\frac{n}{8}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^3}{EF_1 sh^2} - \frac{P_1+P_3(-1)^n}{2EF_h}\cdot\frac{h}{s} - c_0(-1)^n \quad \ldots \ldots \quad (65),$$

$$A_0 = -\frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{h^2}\cdot\frac{1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+8\frac{sh^2}{\lambda^3}\varrho\varrho_3}{1+2\varrho}\cdot\frac{P_1}{EF_1} \quad \ldots \ldots \quad (66),$$

und es verbleiben nur die Konstanten A_1 und A_2 des Ansatzes (54), die zahlenmäßig aus den Randgleichungen (55) und (58) zu berechnen sind.

Diese Lösung gilt für alle Unterfälle, außer für die Fälle $F_h = 0$, d. h., daß der Riegel fehlt oder die Enden nur geführt sind. Das vorletzte Glied in den Formeln (62) und (65) wird dann unendlich, falls der Zähler desselben nicht mit verschwindet, d. h., die Lösung wird unmöglich, falls die beiden äußeren Kräfte P_1 und P_3 sich an der nun scherenartigen kinematischen Kette nicht im Gleichgewicht halten. Ist dieses jedoch erfüllt, so wird die Konstante B_1' willkürlich, da die Randgleichung (59), aus der sie gefunden wird, in diesem Unterfall nur die Bedingung dieses Gleichgewichtes ausdrückt und somit identisch befriedigt ist. Die Konstante B_1' hängt nur noch von der geometrischen Einstellung der kinematischen Kette ab. Setzt man z. B. für unseren Fall Abb. 4 ($n = 14$)

$$\frac{u_0'}{s} = \frac{u_{13}'}{s} \text{ und } \frac{w_0}{s} = -\frac{w_{14}}{s} \quad \ldots \ldots \quad (67),$$

so erhält man daraus

$$B_1' = -\frac{n-1}{8}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^2}{EF_1 sh} \quad \ldots \ldots \quad (62a)$$

und

$$C_1 = -\frac{n}{16}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\frac{P_1\lambda^3}{EF_1 sh^2} \quad \ldots \ldots \quad (65a).$$

Die anderen Konstanten, auch A_0, bleiben dieselben.

Geschlossene Formeln für die Grenzfälle unendlich schlanker Stäbe und bei der gleichmäßig verteilten Knotenlast auch für die allgemeinen Fälle. Wie aus Vorhergehendem ersichtlich und bereits erwähnt wurde, ist im symmetrischen Fall allgemein die homogene Lösung ausschlaggebend, so daß die gesuchten Größen nicht explizite dargestellt werden können. Dies wird nur im Grenzfall möglich, wenn man auf die homogene Lösung für den Knotendrehwinkel des Ansatzes (54) verzichtet. Die Berechnung der Stabkräfte wird hierbei trivial und man erhält für die Stabkraft $U_{\nu,\nu+1}$ im Gurt nach Abb. 4 die gewöhnliche Formel

$$U_{\nu,\nu+1} = -\frac{P\lambda}{8h} - \frac{P_1\lambda}{4h}(-1)^\nu \quad \ldots \ldots \quad (68),$$

ebenso für die im Kreuzungspunkt ν sich schneidenden Diagonalen D_ν

$$D_\nu = \frac{Ps}{4h} + \frac{P_1 s}{2h}(-1)^\nu \quad \ldots \ldots \quad (69).$$

In diesen Formeln gilt das erste Glied für die gleichmäßig verteilte Knotenlast P nicht nur streng für die Grenzfälle, sondern auch angenähert für die allgemeinen Fälle, da es aus den Formeln (46) erhalten wird, wenn man dort $\varrho_2 = 0$ setzt.

Für die Biegungsmomente an den Stabenden nach der Bezeichnung der Abb. 7 findet man für die Einzellast die folgenden Formeln

$$M_{r\nu}{}^{u} = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[\frac{\varrho \left(1 + 2 \frac{s}{\lambda} \varrho_3 + 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3\right)}{1 + 2 \varrho} - (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \; . \quad (70).$$

$$M_{l\nu}{}^{u} = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[\frac{\varrho \left(1 + 2 \frac{s}{\lambda} \varrho_3 + 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3\right)}{1 + 2 \varrho} + (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \; . \quad (71),$$

$$M_{r\nu}{}^{o} = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \varrho \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[- \frac{1 + 2 \frac{s}{\lambda} \varrho_3 + 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3}{1 + 2 \varrho} - (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \; . \quad (72),$$

$$M_{l\nu}{}^{o} = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \varrho \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[- \frac{1 + 2 \frac{s}{\lambda} \varrho_3 + 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho_3}{1 + 2 \varrho} + (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \; . \quad (73),$$

$$M_{l\nu}{}' = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \varrho \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[- \frac{\frac{1}{2} + \frac{s}{\lambda} \varrho_3 - 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho \varrho_3}{1 + 2 \varrho} - (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \; . \quad (74),$$

$$M_{r\nu}{}' = (-1)^{\nu} \frac{3}{2} P_1 \lambda \varrho \frac{J_1}{F_1 h^2} \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{s}{\lambda} \varrho_3 - 4 \frac{s h^2}{\lambda^3} \varrho \varrho_3}{1 + 2 \varrho} - (n - \nu - 1) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \right] \quad . \; . \quad (75).$$

Für die Knotenverschiebung w_{ν}, oder die Ordinaten der unteren Gurtbiegungslinie erhält man

$$w_{\nu} = -(-1)^{\nu} (n - \nu) \left(1 + 8 \frac{s^3}{\lambda^3} \varrho_3\right) \frac{P_1 \lambda^3}{8 E F_1 h^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (76).$$

Der Einfachheit halber sind die obigen Formeln nur für eine Einzellast und für den Fall eines undehnbaren Riegels aufgestellt, da der Einfluß der Dehnung des Riegels im Grenzfall ganz unwesentlich ist. Die Formeln gelten ganz allgemein für jede am Träger mit einem Riegel symmetrisch nach Abb. 4 angeordnete Last P_1, wenn $n \lambda$ die Strecke zwischen Last und Riegel und $\nu \lambda$ den Abstand der Stelle der gesuchten Größe innerhalb dieser Strecke von der Last angibt. Sind mehrere Riegel vorhanden, so verteilt sich eine zwischen zwei Riegeln befindliche Last auf die beiden anschließenden Trägerteile bis zu den beiden benachbarten Riegeln umgekehrt proportional ihrer Längen, so daß dieser Fall auf den behandelten zurückführt. Es muß jedoch betont werden, daß die Anwendung der Formeln auf einen praktischen Fall nicht ohne weiteres statthaft ist. Die Formänderungsgrößen stellen im Grenzfall endliche Extremwerte dar, die, absolut genommen, die oberen Grenzen für die am wirklichen Fachwerk auftretenden Formänderungen abgeben. Bei der üblichen Ermittlung der Nebenspannungen werden diese am idealen Fachwerk gefundenen Formänderungsgrößen mit den tatsächlichen Steifigkeiten der Fachwerkstäbe kombiniert, was genau dem entspricht, wenn man in den Formeln für den Faktor $\frac{J_1}{F_1 h^2}$ $\left(\text{oder für den später eingeführten } \frac{e}{h}\right)$ den wirklichen Wert einsetzt. Dagegen nähert sich dieser Faktor im Grenzfalle der Null, so daß die Momente und auch die Nebenspannungen, wie es für unendlich schlanke Stäbe auch sein muß, verschwinden. Es muß also für jedes Fachwerk einen bestimmten Schlankheitsgrad geben, bei dem die Nebenspannungen ein Maximum haben, sowohl bei gedrungeren als auch bei schlankeren Fachwerken nehmen die Nebenspannungen wieder ab. Die übliche Berechnung oder die uneingeschränkte Anwendung solcher für den Grenzfall abgeleiteter Formeln muß also immer zu große Werte liefern, wobei in besonderen Fällen, so wie z. B. in dem vorliegenden, diese Abweichungen so groß werden können, daß die gefundenen Ergebnisse für die Praxis unbrauchbar werden.

Für den Fall der gleichmäßig verteilten symmetrisch angeordneten Knotenlast P nach Abb. 4 lassen sich nicht nur für den Grenzfall, sondern auch für den allgemeinen Fall geschlossene Formeln angeben. Wie leicht ersichtlich, müssen im allgemeinen Fall bei Berücksichtigung nur der partikulären Lösung die Momente an den Gurtstäben $M_{r\nu}{}^{u}$ und $M_{l\nu}{}^{u}$ (Abb. 7) verschwinden. Die Momente an den Diagonalstäben werden absolut genommen alle gleich und zwar

$$\left.\begin{aligned} M_{l\nu}{}^{o} = -M_{r\nu}{}^{o} = M_{r\nu-1}{}'^{u} = -M_{l\nu}{}'^{u} = -\frac{3}{8} P\lambda \frac{J_2}{F_1 h^2}\cdot\frac{\lambda}{s} \\ \cdot \frac{8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\left(1+2\frac{s}{\lambda}\varrho_3\right)}{\left[(1-12\varrho_2)^2-\left(1+3\frac{\lambda^2}{h^2}\varrho_2\right)\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3+48\frac{h^2}{\lambda^2}\varrho_2\right)\right]} = \sim \frac{3}{8}P\lambda\frac{J_2}{F_1 h^2}\cdot\frac{\lambda}{s}\left(1+2\frac{s}{\lambda}\varrho_3\right) \end{aligned}\right\} \quad (77),$$

wenn man $\varrho_2 = 0$ setzt.

Die Verschiebung w des geradebleibenden Gurtes erhält man aus der Konstanten c_0 [Gl. (45) und (46)]; sie wird hier der Kürze halber nur angenähert, indem $\varrho_2 = 0$ gesetzt wird, angeschrieben

$$w = \frac{P\lambda^3}{32\,E\,F_1\,h^2}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78).$$

Für den Grenzfall erhält man entsprechend den Formeln (70) bis (76) die folgenden Ausdrücke

$$M_{r\nu}{}^{u} = -M_{l\nu}{}^{u} = (-1)^{n+\nu}\cdot\frac{3}{8}P\lambda\frac{J_1}{F_1 h^2}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79),$$

$$M_{l\nu}{}^{o} = -M_{r\nu}{}^{o} = M_{r\nu-1}{}'^{u} = -M_{l\nu}{}'^{u} = \frac{3}{8}P\lambda\frac{J_2}{F_1 h^2}\frac{\lambda}{s}\left[\left(1+2\frac{s}{\lambda}\varrho_3\right)-\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)(-1)^{n+\nu}\right] \quad (80),$$

$$w_\nu = \frac{P\lambda^3}{32\,E\,F_1\,h^2}\left(1+8\frac{s^3}{\lambda^3}\varrho_3\right)\left[(-1)^{n+\nu}-1\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81),$$

welche ebenfalls für einen undehnbaren Riegel aufgestellt sind, wobei n die Anzahl der Felder angibt und die Knotennummern $\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ vom riegellosen Ende an zu zählen sind. Bei Vorhandensein mehrerer Riegel ist $2n$ die Anzahl der Felder zwischen je zwei Riegeln und die Knotennummern $\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ werden von der Mitte aus nach links und rechts bis zu den Riegeln gezählt.

Die bezüglich der Anwendung der Formeln für die Einzellast angestellten Erwägungen werden hier durch die Gegenüberstellung der Formeln (77), (78) und (79), (80), (81) besonders deutlich. Infolge einer symmetrisch angeordneten gleichmäßig verteilten Belastung wird der Träger in einen längs der Achse gleichen Formänderungs- und Spannungszustand versetzt, indem die Gurte eine Längenänderung erleiden, jedoch gerade und parallel bleiben und sich nur gegeneinander quer zur Längsachse verschieben, so daß nur die Diagonalen infolge der Knotensteifigkeit durch gleiche Momente gebogen werden. Dieser gleichmäßige Zustand wird nur in der Nähe der Riegel gestört, wo sich rasch abklingende Schwankungen überlagern, die durch die homogene Lösung gegeben sind. Dagegen haben die Formeln (79) bis (81) für den idealen Fall neben denselben gleichbleibenden Gliedern noch solche mit dem Faktor $(-1)^{n+\nu}$ behaftete, welche eine über den ganzen Träger in gleicher Stärke verlaufende Schwankung angeben. Außerdem zeigen die Zahlenrechnungen, daß die in den wirklichen Fällen auftretenden Schwankungen im Störungsbereich viel kleiner als diese im idealen Fall sind.

5. Vergleich der nach den geschlossenen Formeln (28) bis (37) und aus der strengen Rechnung ermittelten Stabkräfte und Momente im antisymmetrischen Fall (3. Abschnitt). Für die Gurtstabkräfte findet man die größten Abweichungen der Formel (28) von der strengen Rechnung im Fall IV (starke Gurte, schwache Diagonalen). Sowohl für den einseitig wie für den beiderseits gelagerten Träger bleibt dieser Fehler, der sich auf die Stelle der größten Gurtkraft dicht an der Störungsstelle bezieht, für alle Unterfälle unterhalb $\pm\frac{5}{1000}$ des Gesamtwertes. Am freien Ende des einseitig gelagerten oder am Auflagerende des beiderseits unterstützten Trägers gibt Formel (28) den strengen Wert wieder, wenn sich an diesem Ende kein Riegel befindet; bei Vorhandensein eines Riegels bleibt der Fehler unter $-\frac{6}{100}$, was jedoch bedeutungslos ist, da hier die Gurtkraft an sich am kleinsten ist.

Für die Diagonalstabkräfte werden die Abweichungen der Formeln (29) und (30) von der strengen Rechnung merklicher und sind ebenfalls für Fall IV am größten. Für den einseitig gelagerten Träger ist der Fehler am größten am Auflager, wenn sich dort kein Riegel befindet, und bleibt unter $-\frac{12}{100}$, ist dagegen dort ein Riegel, so bleibt er unter $+\frac{12}{100}$. Für den beiderseits unterstützten Träger ist der Fehler in der Mitte an der Lastangriffsstelle am

größten und bleibt unter $+\frac{12}{100}$ für alle Unterfälle. Am freien Ende des einseitig oder am Auflagerende des beiderseits gelagerten Trägers bleibt der Fehler, wenn dort kein Riegel vorhanden ist, unter $+\frac{5}{1000}$, bei Vorhandensein eines Riegels unter $+\frac{10}{100}$.

Mit der Entfernung von der Störungsstelle geht der Fehler unter alternierendem Vorzeichenwechsel sehr rasch zurück und sinkt nach dem dritten Feld bereits unter ein Hundertstel der obigen Beträge herab. Im Fall I (starke Gurte, starke Diagonalen) beträgt der Fehler etwa ein Zehntel, im Fall II (schwache Gurte und Diagonalen) etwa ein Hundertstel der Beträge im Fall IV; für die Grenzfälle geben die Formeln (28) bis (30) die strengen Werte an.

Für den Zahlenvergleich der Biegungsbeanspruchungen infolge der Knotensteifigkeit ist es zweckmäßig, an Stelle der Biegungsmomente die größten Randspannungen zu benutzen.

Zahlentafel 1.

Zahlenfaktor für die Nebenspannung an den Gurtstäben.

			Strenge Rechnung								Formeln		Fehler in vH	
	Unterfälle		$J_h = 0$		$J_h = J_2$		$J_h = J_1$		$J_h = \infty$		$(J_h = \infty)$			
Hauptfall	Stabmoment	Knoten Nr. ν	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast
		14	1,2702	1,2016			1,3417	1,2088	1,4424	1,2189	1,2747	1,1422	— 12	— 6
		13	1,1101	1,0552			1,1050	1,0547	1,0977	1,0540	1,1136	1,0606	+ 2	+ 1
I	M_l^u	12	1,1321	1,0708			1,1324	1,0709	1,1330	1,0709	1,1227	1,0659	— 1	0
		11	1,1427	1,0769			1,1427	1,0769	1,1426	1,0768	1,1334	1,0721	— 1	0
		1	1,3265	2,6150			1,3265	2,6150	(0,2494)	(4,3981)	0,2007	2,5147	— 20	— 43
	M_r^u	0	0,8150	0,6150			0,8150	0,6150	(2,9806)	(4,9096)	1,6765	1,6765	— 44	— 66
		14	1,3078	1,2409			1,3649	1,2332	1,4489	1,2218	1,2747	1,1422	— 12	— 7
		13	1,0970	1,0464			1,0922	1,0470	1,0852	1,0479	1,1136	1,0606	+ 3	+ 1
II	M_l^u	12	1,1246	1,0672			1,1250	1,0672	1,1256	1,0671	1,1227	1,0659	0	0
		11	1,1338	1,0723			1,1337	1,0723	1,1337	1,0723	1,1334	1,0721	0	0
		1	1,5157	2,5200			1,5157	2,5200	(0,1942)	(4,4954)	0,2007	2,5147	+ 3	— 44
	M_r^u	0	1,0223	0,5200			1,0223	0,5200	(2,8459)	(4,9888)	1,6765	1,6765	— 41	— 66
		14	1,3099	1,2431			1,3662	1,2346	1,4492	1,2220	1,2747	1,1422	— 12	— 7
		13	1,0963	1,0459			1,0915	1,0466	1,0845	1,0476	1,1136	1,0606	+ 3	+ 1
III (Grenzfall)	M_l^u	12	1,1242	1,0670			1,1246	1,0670	1,1252	1,0669	1,1227	1,0659	0	0
		11	1,1333	1,0720			1,1332	1,0720	1,1332	1,0720	1,1334	1,0721	0	0
		1	1,5260	2,5147			1,5260	2,5147	(0,1912)	(4,5008)	0,2007	2,5147	+ 5	— 44
	M_r^u	0	1,0337	0,5147			1,0337	0,5147	(2,8383)	(4,9930)	1,6765	1,6765	— 41	— 66
		14	0,0827	0,0703	0,1780	0,1352	1,7638	1,2163	2,6288	1,8060	2,1470	1,5547	— 18	— 14
		13	1,2732	1,2514	1,2520	1,2380	0,8990	1,0151	0,7065	0,8936	1,0563	1,0502	+ 49	+ 17
IV	M_l^u	12	1,0087	1,0128	1,0134	1,0155	1,0930	1,0618	1,1364	1,0870	1,0570	1,0545	— 7	— 3
		11	1,0687	1,0684	1,0676	1,0672	1,0494	1,0582	1,0395	1,0529	1,0571	1,0597	+ 2	+ 1
		1	14,2787	2,2540	14,2787	2,2540	14,2787	2,2540	(11,3579)	(6,5529)	11,4701	2,2540	+ 1	— 65
	M_r^u	0	0,0685	0,2540	0,0685	0,2540	0,0685	0,2540	(13,8660)	(20,7631)	7,1161	7,1161	— 49	— 66
		14	0,0800	0,0676	0,1710	0,1279	1,8381	1,2344	2,8887	1,9317	2,1470	1,5547	— 26	— 20
		13	1,3502	1,3233	1,3227	1,3065	0,8204	0,9977	0,5038	0,8031	1,0563	1,0502	+ 110	+ 31
V (Grenzfall)	M_l^u	12	0,9673	0,9778	0,9757	0,9825	1,1290	1,0692	1,2257	1,1239	1,0570	1,0545	— 14	— 6
		11	1,0848	1,0814	1,0823	1,0801	1,0347	1,0555	1,0048	1,0401	1,0571	1,0597	+ 5	+ 2
		1	15,3779	2,2540	15,3779	2,2540	15,3779	2,2540	(11,4701)	(8,8851)	11,4701	2,2540	— 0	— 75
	M_r^u	0	0,1072	0,2540	0,1072	0,2540	0,1072	0,2540	(13,9782)	(24,1558)	7,1161	7,1161	— 49	— 71

Zu diesem Zweck wird bei den Formeln (31) und (32) für die Gurtstabmomente der Faktor $\frac{M_\nu{}^m}{2h\oint F_1}\cdot\frac{J_1}{h}$ und bei den Formeln (33) bis (35) für die Momente der Diagonalstäbe der Faktor $\frac{Q_\nu s}{2\oint h F_2}\cdot\frac{J_2}{h}$ herausgezogen, sodann $J_1 = W_1\cdot e$ und $J_2 = W_2\cdot e$ gesetzt, wo W_1 und W_2 die entsprechenden kleinsten Widerstandsmomente und e die größten Abstände der Randfaser von der Schwerlinie der einzelnen Stabprofile, also bei symmetrischen Profilen die halbe Profilhöhe, bedeuten. Dividiert man nun die Biegungsmomente, Formeln (31) bis (35), durch die entsprechenden Widerstandsmomente, so erhält man für die herausgezogenen Faktoren den Ausdruck $\sigma\cdot\frac{e}{h}$, wo mit σ gemäß den Formeln (28) bis (30), wenn dort die unwichtigeren

Zahlentafel 2.

Zahlenfaktor für die Nebenspannung an den Diagonalen am Gurtanschluß.

			Strenge Rechnung								Formeln		Fehler in vH	
Unterfälle			$J_h=0$		$J_h=J_2$		$J_h=J_1$		$J_h=\infty$		$(J_h=\infty)$			
Hauptfall	Stabmoment	Knoten Nr. ν	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast
I	M_l^0	14	12.142	22,940			11,239	22,759	9,9696	22,505	9,0895	21,645	— 9	— 4
		13	13,340	24,869			13,400	24,880	13,485	24,896	13,147	24,578	— 3	— 1
		12	12,285	22,772			12,281	22,772	12,276	22,771	12,234	22,679	0	0
		11	11,384	20,924			11,385	20,924	11,385	20,924	11,324	20,852	0	0
		1	6,119	2,297			6,119	2,297	(6,8496)	(3,1238)	7,0221	2,2953	+ 2	— 26
	M_r^0	0	0,576	0,435			0,576	0,435	(4,1173)	(3,5717)	2,0338	2,0338	— 51	— 43
II	M_l^0	14	12,502	23,691			11,794	23,882	10,751	24,164	10,030	23,609	— 7	— 2
		13	14,220	26,604			14,275	26,590	14,356	26,570	14,022	26,271	— 2	— 1
		12	13,031	24,258			13,027	24,259	13,020	24,260	13,043	24,278	0	0
		11	12,072	22,290			12,073	22,290	12,073	22,290	12,068	22,285	0	0
		1	6,2465	2,3605			6,247	2,3605	(7,0027)	(3,2343)	7,0116	2,3568	0	— 27
	M_r^0	0	0,7229	0,3677			0,7229	0,3677	(4,2745)	(3,7354)	1,9634	1,9634	— 54	— 47
III (Grenzfall)	M_l^0	14	12,522	23,733			11,824	23,944	10,794	24,256	10,090	23,717	— 7	— 2
		13	14,269	26,700			14,323	26,685	14,404	26,661	14,070	26,364	— 2	— 1
		12	13,072	24,339			13,068	24,341	13,061	24,341	13,088	24,364	0	0
		11	12,110	22,366			12,111	22,366	12,111	22,366	12,109	22,364	0	0
		1	6,2535	2,3640			6,2535	2,3640	(7,0110)	(3,2401)	7,0110	2,364	0	— 27
	M_r^0	0	0,7310	0,3640			0,7310	0,3640	(4,2832)	(3,7443)	1,9596	1,9596	— 54	— 48
IV	M_l^0	14	7,909	13,423	7,613	13,019	2,679	6,301	0,013	2,636	0,901	1,847	+	— 30
		13	4,077	5,801	4,138	5,878	5,155	7,161	5,710	7,860	4,701	6,960	— 18	— 11
		12	4,651	6,783	4,638	6,768	4,427	6,524	4,312	6,390	4,522	6,563	+ 5	+ 3
		11	4,319	6,123	4,322	6,125	4,366	6,172	4,390	6,198	4,346	6,166	— 1	0
		1	6,449	2,194	6,449	2,194	6,449	2,194	(7,682)	(4,009)	7,702	2,194	0	— 45
	M_r^0	0	0,485	1,796	0,485	1,796	0,485	1,796	(3,692)	(2,924)	0,9586	0,9586	— 74	— 67
V (Grenzfall)	M_l^0	14	7,650	12,903	7,394	12,564	2,697	6,339	0,262	2,415	0,860	1,906	+ 228	— 21
		13	3,953	5,573	4,024	5,660	5,335	7,269	6,161	8,283	4,719	6,996	— 23	— 16
		12	4,754	6,964	4,734	6,941	4,366	6,525	4,134	6,263	4,539	6,596	+ 10	+ 5
		11	4,301	6,101	4,307	6,107	4,411	6,214	4,477	6,282	4,362	6,196	— 3	— 1
		1	6,550	2,196	6,550	2,196	6,550	2,196	(7,686)	(4,123)	7,685	2,196	0	— 47
	M_r^0	0	0,759	1,517	0,759	1,517	0,759	1,517	(3,694)	(3,185)	0,9489	0,9489	— 74	— 70

Glieder vernachlässigt werden, die Grundspannung und mit $\frac{e}{h} = \frac{2e}{2h}$ bei symmetrischen Profilen das Verhältnis der Profilhöhe des entsprechenden Stabes zur Systemhöhe des Fachwerkträgers angegeben sind. Die größte Randnebenspannung erscheint dann in der Form $\pm \text{Zahlenfaktor} \cdot \sigma \cdot \frac{e}{h}$, so daß neben dem Vergleich zwischen der strengen Rechnung und den angegebenen Formeln auch die absolute Größe der Nebenspannung, bezogen auf die Grundspannung, erhalten wird. Wie bereits erwähnt, nähert sich im Grenzfall der Zahlenfaktor einem bestimmten endlichen Grenzwert, dagegen das Verhältnis $\frac{e}{h}$ der Null.

Bei der Wiedergabe der gefundenen Zahlenergebnisse beschränke ich mich wegen Raumersparnis nur auf eine ganz geringe Auswahl, die so getroffen ist, daß nur die größten Werte sowohl für die absolute Größe der Nebenspannung, als auch für die Abweichung zwischen den Formeln und der strengen Rechnung zur Mitteilung gelangen.

In den folgenden Tafeln 1, 2 und 3 für den obigen Zahlenfaktor beziehen sich die Unterfälle $J_h = 0$, $J_h = J_2$, $J_h = J_1$, $J_h = \infty$ auf den Riegel am Auflagerende, Abb. 3; das freie Ende ist durchweg ohne Riegel gedacht, bis auf die eingeklammerten Zahlen, die für einen starren

Zahlentafel 3.

Zahlenfaktor für die Nebenspannung an den Kreuzungsknoten der Diagonalen.

			Strenge Rechnung								Formeln		Fehler in vH	
Unterfälle			$J_h = 0$		$J_h = J_2$		$J_h = J_1$		$J_h = \infty$		$(J_h = \infty)$			
Hauptfall	Stabmoment	Knoten Nr. ν	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast	Verteilte Last	Einzellast
I	M'	13	25,615	51,111			25,353	51,058	24,986	50,984	26,199	52,145	+ 5	+ 2
		12	24,306	48,346			24,323	48,349	24,347	48,354	24,278	48,282	0	0
		11	22,344	44,416			22,343	44,416	22,342	44,415	22,358	44,420	0	0
		1	3,969	5,794			3,969	5,794	(3,948)	(5,722)	4,0352	5,7939	+ 2	0
		0	3,092	1,931			3,092	1,931	(4,118)	(3,092)	3,1559	3,1559	— 23	+ 2
II	M'	13	26,316	52,518			26,102	52,576	25,787	52,661	27,075	53,903	+ 5	+ 2
		12	25,147	50,010			25,163	50,006	25,188	50,000	25,088	49,910	0	0
		11	23,098	45,910			23,097	45,911	23,095	45,911	23,103	45,917	0	0
		1	4,1253	5,9892			4,1253	5,9892	(4,0995)	(5,8997)	4,1040	5,9892	0	+ 2
		0	3,2380	1,9964			3,2380	1,9964	(4,3127)	(3,2380)	3,1615	3,1615	— 27	— 2
III (Grenzfall)	M'	13	26,355	52,595			26,143	52,659	25,831	52,754	27,123	54,000	+ 5	+ 2
		12	25,193	50,102			25,210	50,097	25,234	50,091	25,133	50,000	0	0
		11	23,140	45,993			23,138	45,993	23,136	45,993	23,144	46,000	0	0
		1	4,134	6,000			4,134	6,000	(4,108)	(5,9095)	4,108	6,000	0	+ 2
		0	3,246	2,000			3,246	2,000	(4,3235)	(3,2461)	3,162	3,162	— 27	— 2
IV	M'	13	6,546	12,878	6,443	12,737	4,722	10,393	3,782	9,114	5,490	10,761	+ 45	+ 18
		12	4,883	9,560	4,904	9,587	5,259	10,034	5,453	10,278	5,101	9,964	— 6	— 3
		11	4,758	9,244	4,753	9,239	4,680	9,154	4,639	9,107	4,712	9,167	+ 2	+ 1
		1	1,657	1,196	1,657	1,196	1,657	1,196	(1,586)	(0,881)	1,585	1,196	0	+ 35
		0	2,046	0,3986	2,046	0,3986	2,046	0,3986	(3,165)	(2,0456)	1,7804	1,7804	— 44	— 13
V (Grenzfall)	M'	13	6,462	12,710	6,373	12,592	4,744	10,433	3,718	9,073	5,509	10,800	+ 48	+ 19
		12	4,852	9,507	4,877	9,537	5,331	10,095	5,618	10,446	5,118	10,000	— 9	— 4
		11	4,803	9,327	4,796	9,320	4,668	9,176	4,588	9,085	4,728	9,200	+ 3	+ 1
		1	1,669	1,200	1,669	1,200	1,669	1,200	(1,582)	(0,754)	1,582	1,200	0	+ 59
		0	2,127	0,400	2,127	0,400	2,127	0,400	(3,145)	(2,127)	1,7724	1,7724	— 44	— 16

Riegel am freien Ende gelten. Die Fehlerangabe bezieht sich auf den Vergleich der aus den Formeln gewonnenen Werte mit denen aus der strengen Rechnung für den Unterfall $J_h = \infty$.

Für die Fälle I, II, III sind die Abweichungen der Formelwerte von denen der strengen Rechnung nur ganz gering und beschränken sich auf die unmittelbare Umgebung der Störungsstelle, d. h. auf das Auflagerende beim einseitig gelagerten Träger oder auf die Lastangriffsstelle eines beiderseits unterstützten Trägers mit einer Last in der Mitte. Diese gute Übereinstimmung auch an den Störungsstellen wird durch das letzte mit P_ν behaftete Glied in den Formeln (31) bis (35) herbeigeführt, wodurch auch der lokale Einfluß einer Knotenlast auf die nächste Umgebung zum größten Teil mit erfaßt wird. Für die Fälle IV und V sind die Abweichungen etwas größer, da diese mit den relativ zu den Gurten sehr schwachen Diagonalen in bezug auf die Randbedingungen empfindlicher sind. Schlechter ist die Übereinstimmung unmittelbar am freien Ende des einseitig gelagerten oder am Auflagerende des beiderseits gestützten Trägers, was jedoch für die Praxis von geringerer Bedeutung ist.

Die Zahlen für die wirklichen Fälle und die zugehörigen Grenzfälle unterscheiden sich nur wenig voneinander, so daß auch die bisher übliche angenäherte Berechnung richtige Werte liefern würde. Überhaupt kommt es im vorliegenden antisymmetrischen Fall nicht auf die Schlankheit (ϱ_1, ϱ_2) der Stäbe an sich an, sondern vorwiegend auf das gegenseitige Schlankheitsverhältnis der Gurt- und Diagonalstäbe (ϱ, ϱ_3), insbesondere auf das Querschnittsverhältnis $\varrho_3 = \frac{F_1}{F_2}$.

Der Zahlenfaktor für die Nebenspannung in den Gurtstäben ist längs des ganzen Trägers und für alle Fälle beinahe gleich und kann rund gleich eins gesetzt werden, so daß die Nebenspannung in den Gurten mit $\sigma \frac{e}{h}$ grob geschätzt werden kann. Der Verlauf der Biegungsmomente längs der einzelnen Gurtstäbe ist schwach trapezförmig nach Abb. 8, wobei das hier zur Spannungsermittlung herangezogene Moment M_l^u das größere ist. Der Wert $\sigma \frac{e}{h}$ entspricht genau der Spannungsverteilung über den Gurtquerschnitt eines Vollwandträgers; es ist somit bemerkenswert, daß diese Verteilung für alle Fälle, auch die Grenzfälle, annähernd erhalten bleibt.

Abb. 8. Momentenflächen im antisymmetrischen Fall.

Für die Diagonalen wächst der Zahlenfaktor mit dem Angriffsmoment längs des Trägers, so z. B. für den mit einer Einzellast belasteten einseitig gelagerten Träger vom freien Ende zum Auflagerende hin linear, so daß die Nebenspannung relativ zur Grundspannung in diesem Falle längs des Trägers linear anwächst. Außerdem ist die Nebenspannung an den Kreuzungsknoten der Diagonalen erheblich größer als an den Gurtanschlüssen, wobei die Momentenfläche ein überschlagenes Trapez ist nach Abb. 8.

Zum Vergleich der Formeln (36) und (37) mit der strengen Rechnung wird noch die Durchbiegung am freien Ende des einseitig gelagerten Trägers, Abb. 3, angegeben (Zahlentafel 4)

Zahlentafel 4.

Durchbiegung ($l = n\lambda$).

Hauptfall	Strenge Rechnung: Unterfall $J_h = 0$ – Verteilte Last $\frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$	Strenge Rechnung: Unterfall $J_h = 0$ – Einzellast $\frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$	Strenge Rechnung: $J_h = \infty$ – Verteilte Last $\frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$	Strenge Rechnung: $J_h = \infty$ – Einzellast $\frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$	Formeln – Verteilte Last $\frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$	Formeln – Einzellast $\frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$
I	0,98534	0,98054	0,98534	0,98054	0,98503	0,98029
II	1,01290	1,00802	1,01290	1,00802	1,01288	1,00801
III	1,01443	1,00955	1,01443	1,00955	1,01443	1,00955
IV	1,06487	1,04491	1,06179	1,04328	1,06317	1,04402
V	1,07215	1,05284	1,07215	1,05284	1,07215	1,05284

wo $P = p\lambda$ und $J = 2\,F_1\,h^2$ gesetzt sind.

6. Die Zusatzkräfte und -momente aus dem symmetrischen Fall (4. Abschnitt) und ihre Abhängigkeit von den Schlankheitsverhältnissen der Fachwerkstäbe. Zum besseren Verständnis der scherenartigen Wirkung im symmetrischen Belastungsfall, Abb. 4, und ihrer richtigen

Abschätzung in bezug auf die Größe ihres Einflusses auf die Nebenspannungen wird die Besprechung der Formänderung, d. h. der Gurtbiegungslinie, vorweggenommen. Der für die Einzellast in Formel (76) angegebene Ausdruck

$$\left(1+8\,\frac{s^3}{\lambda^3}\,\varrho_3\right)\frac{P_1\,\lambda^3}{8\,E\,F_1\,h^2} \qquad \text{(76a)}$$

entspricht der Formänderung nur eines Feldes und beträgt, auf die Form $\frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$ gebracht, ($l = n\,\lambda$, $J = 2\,F_1\,h^2$) für $n = 14$ im Grenzfall III $1{,}0464 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$ und im Grenzfall V $4{,}1387 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{P_1\,l^3}{3\,E\,J}$. Er ist demnach relativ zur größten Durchbiegung im antisymmetrischen Belastungsfall für unser Beispiel nur gering. Allgemein kann man die Größenordnung des Verhältnisses der größten Durchbiegung im antisymmetrischen Fall zu diesem Formänderungsbetrag eines Feldes im symmetrischen Fall proportional der dritten Potenz der Gesamtfelderanzahl schätzen.

Da dieser Ausdruck in Formel (76) noch mit dem Faktor $(-1)^{\nu}\,(n-\nu)$ multipliziert wird, so wächst der absolute Wert der Durchbiegung linear mit der Entfernung vom Riegel. Wir erhalten somit die in der Fachliteratur nach dem bisher üblichen angenäherten Verfahren, dem die Formel (76) entspricht, berechnete öfters angeführte Zickzacklinie mit anwachsenden Amplitüden. Zum Vergleich sind in der Zahlentafel 5 die gefundenen Ergebnisse der strengen Rechnung zusammengestellt, wobei der obige Ausdruck (76a) als Multiplikator herausgezogen ist. Hierbei beziehen sich die Zahlen der Spalte „frei" auf die Anordnung Abb. 9 und der Spalte „geführt" auf die Anordnung nach Abb. 10.

Abb. 9.

Abb. 10.

Zahlentafel 5.

Die Biegungsordinaten im symmetrischen Fall für eine Einzellast. (Strenge Rechnung. Multiplikator 76a.)

Knoten Nr.	Fall I		II		IV		Grenzfälle III u. V Formel (76)
ν	frei	geführt	frei	geführt	frei	geführt	frei oder geführt
$\nu = 0$	$-1{,}2194$	$-0{,}8383$	$-4{,}2217$	$-3{,}771$	$-1{,}4029$	$-0{,}9294$	$-14 = (n-\nu)\,(-1)^{\nu}$
1	$+0{,}4238$	$+0{,}2407$	$+3{,}2696$	$+2{,}8897$	$+0{,}5603$	$+0{,}2359$	$+13$
2	$-0{,}1152$	$-0{,}0593$	$-2{,}5059$	$-2{,}2114$	$-0{,}1103$	$-0{,}0015$	-12
3	$+0{,}0275$	$+0{,}0132$	$+1{,}9170$	$+1{,}6913$	$-0{,}0159$	$-0{,}0305$	$+11$
4	$-0{,}0059$	$-0{,}0027$	$-1{,}4651$	$-1{,}2923$	$+0{,}0231$	$+0{,}0163$	-10
5	$+0{,}0012$	$+0{,}0005$	$+1{,}1182$	$+0{,}9861$	$-0{,}0101$	$-0{,}0046$	$+9$

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, wie der Einfluß der scherenartigen Wirkung durch die Annahme eines idealen Fachwerkes übertrieben wird. Der obige Betrag, Formel (76a), wird in den Fällen I und IV erst an der Angriffsstelle selbst erreicht und verschwindet beinahe bereits nach drei Feldern. Nur im Falle II sehr schlanker Stäbe, der in der Baupraxis kaum vorkommen dürfte, erhält man an der Angriffsstelle den vierfachen Betrag und ein nur langsames Abklingen desselben. Im Idealfall hat man dagegen den n-fachen Betrag, wenn n die Felderanzahl zwischen Angriffsstelle und Riegel ist. Man wird also in praktischen Fällen die Durchbiegung an der Angriffsstelle immer kleiner als das Vierfache des Ausdruckes (76a) schätzen können.

Für die Stabkräfte erhält man aus den Formeln (68) und (69) für die Grenzfälle III und V, d. h. das ideale Fachwerk, sowohl für die Gurte als auch für die Diagonalen dem absoluten Betrage nach gleichbleibende Werte. In Zahlentafel 6 sind für die beiden Anordnungen nach Abb. 9 und 10 die aus der strengen Rechnung gefundenen Ergebnisse gegenübergestellt, wobei die entsprechenden Ausdrücke $-\frac{P_1\,\lambda}{4\,h}\,(-1)^{\nu}$ und $\frac{P_1\,s}{2\,h}\,(-1)^{\nu}$ der Formeln (68) und (69) als Multiplikatoren herausgezogen sind.

Zahlentafel 6.

Die Stabkräfte im symmetrischen Fall.

	Stab	Fall I		II		IV		Grenzfälle III und V Formeln (68) und (69)
		frei	geführt	frei	geführt	frei	geführt	frei oder geführt
Gurt	$U_{0,1}$	0,8090	0,5530	0,9637	0,8773	0,8439	0,6880	1
	$U_{1,2}$	0,2791	0,1581	0,7601	0,6734	0,4452	0,2303	1
	$U_{2,3}$	0,0757	0,0389	0,5837	0,5152	0,1236	0,0306	1
Diagonalen	$D_{0,0}$	0,8995	0,7355	0,9728	0,9243	0,8545	0,7038	1
	$D_{1,1}$	0,3867	0,2338	0,7997	0,7120	0,4567	0,2380	1
	$D_{2,2}$	0,1141	0,0609	0,6171	0,5451	0,1283	0,0326	1

Zum weiteren Vergleich mit dem antisymmetrischen Belastungsfall sind die diesen Stabkräften entsprechenden Spannungen auf die früher eingeführte Grundspannung σ bezogen worden, und zwar für das freie Ende eines einseitig gelagerten oder das Auflagerende eines beiderseits gestützten Trägers (Spalte „frei"), für das Auflagerende eines einseitig gelagerten Trägers (Spalte „Auflager") und für die Lastangriffsstelle eines beiderseits gestützten Trägers mit einer Last in der Mitte (Spalte „geführt"), immer unter der Annahme, daß sich an diesen Stellen kein Riegel befindet. Die in Zahlentafel 7 angeführten Zahlen geben also an, um wieviel sich die Grundspannung σ aus dem antisymmetrischen Belastungsfall ändert, wenn die Einzellast nicht antisymmetrisch an beiden, sondern nur einseitig an einem Gurt angreift. Die linke Stabbezeichnung gilt in dieser Tafel für die Spalte „frei", die rechte für die zwei anderen Spalten.

Zahlentafel 7.

Die Stabspannungen im symmetrischen Fall bezogen auf die Grundspannung σ im antisymmetrischen Fall.

	Stab	Fall I			II			IV			Grenzfälle III u. V			Stab
		frei	Auflag.	geführt	frei	Auflag.	geführt	frei	Auflag.	geführt	frei	Auflag.	geführt	
Gurt	$U_{0,1}$	0,8332	0,0308	0,0211	0,9651	0,0357	0,0325	0,8510	0,0315	0,0257	1	$\frac{1}{27}$		U_{13-14}
	$U_{1,2}$	0,0958	0,0115	0,0065	0,2537	0,0320	0,0270	0,1496	0,0180	0,0093	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{25}$		$U_{12,13}$
	$U_{2,3}$	0,0156	0,0034	0,0017	0,1169	0,0254	0,0224	0,0249	0,0054	0,0013	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{23}$		$U_{11,12}$
Diagonalen	$D_{0,0}$	0,9263		0,7575	0,9793		0,9257	0,8617		0,7097	1			$D_{13,14}$
	$D_{1,1}$	0,3983		0,2408	0,8009		0,7131	0,4606		0,2400	1			$D_{12,13}$
	$D_{2,2}$	0,1175		0,0628	0,6181		0,5459	0,1294		0,0329	1			$D_{11,12}$

Da die Gurtstabkräfte im antisymmetrischen Fall entsprechend dem Angriffsmoment wachsen, im symmetrischen jedoch im Idealfall gleichbleiben, so ist die Änderung der Grundspannung sogar für den Idealfall unwesentlich bis auf das freie Ende des einseitig gelagerten, bzw. das Auflagerende eines beiderseits gestützten Trägers.

Dagegen erleiden die Diagonalkräfte im idealen Fall eine Änderung vom Betrage der Grundkraft, so daß der eine Diagonalstabzug die doppelte Spannung erhält gegenüber dem antisymmetrischen Fall, der andere spannungslos wird. Tatsächlich ist diese Änderung nicht ganz so groß und beschränkt sich in den Fällen I und IV nur auf die Lastangriffsstellen, indem sie von dort ab sehr rasch fällt. Im Fall II ist diese Abnahme bereits eine langsamere.

Besonders kraß zeigt sich die Übertreibung infolge der Idealisierung bei den Nebenspannungen aus den Stabbiegungsmomenten, da diese von den Schlankheitsverhältnissen empfindlich abhängen. In den Formeln (70) bis (75) für die Grenzfälle erscheint wieder der Faktor $(n - \nu)$, wie bei den Biegungsordinaten in Formel (76). Von den gewonnenen Zahlenergebnissen wird in Zahlentafel 8 nur eine kleine Auswahl der größten Werte mitgeteilt und zwar nur für die oben erwähnten beiden Fälle „geführt" ($\nu = 14$ bis 11) und „frei" ($\nu = 0$ bis 3), da der Fall „Auflager" bereits etwas kleinere Werte liefert. Hierbei ist, wie früher, die Nebenspannung auf die Form $\pm$ Zahlenfaktor $\cdot \sigma \cdot \frac{e}{h}$ gebracht, wo für σ dieselbe Grundspannung aus dem

antisymmetrischen Belastungsfall zu setzen ist, und in der Zahlentafel 8 nur der Zahlenfaktor angeführt worden.

Um immer die größten Werte zu erhalten, sind die eingeklammerten Zahlen dieser Zahlentafel nicht aus dem angegebenen Moment $M_r'^u$, sondern aus dem Moment $M_l'^u$ gewonnen.

Wie aus den Zahlentafeln 1, 2, 3 und 8 ersichtlich, bleiben für das Auflagerende eines einseitig gelagerten oder für die Lastangriffsstelle eines beiderseits gestützten Trägers mit einer Last in der Mitte ($\nu = 14, 13, 12, 11$) in den Fällen I und IV die Nebenspannungen im symmetrischen Fall sogar unter denjenigen im antisymmetrischen Fall und beschränken sich nur auf die Umgebung der Störungsstellen; im Fall II wachsen sie schon für die Gurtstäbe auf etwa das Zweiundeinhalbfache und für die Diagonalen auf das Anderthalbfache an den Kreuzungsknoten und bis auf das Dreiundeinhalbfache an den Gurtanschlüssen des antisymmetrischen Belastungsfalles an; in den Grenzfällen III und V wird dieses Verhältnis ganz übertrieben etwa gleich das Elf- und Vierzigfache. Für das freie Ende eines einseitig gelagerten oder das Auflagerende eines beiderseits gestützten Trägers ($\nu = 0, 1, 2, 3$) wird dieses Verhältnis in allen Fällen entsprechend größer. In den Grenzfällen wird sogar teilweise der dreihundertfache Betrag erreicht. Praktisch wird an diesem Ende immer ein Riegel eingebaut, so daß der symmetrische Lastfall hier vermieden wird. Danach wird man in praktischen Fällen die Nebenspannungen für die Gurte grob unter dem dreifachen, für die Diagonalen unter dem zweifachen (Kreuzung) bzw. vierfachen (Gurtanschluß) Betrage derjenigen des antisymmetrischen Falles schätzen können. Die Momentenflächen sind für alle Stäbe überschlagene Trapeze, Abb. 11, wobei das Vorzeichen von Feld zu Feld wechselt. Für genauere Untersuchungen bleibt für den Fall der Einzellast nur die strenge Rechnung.

Abb. 11. Momentenflächen im symmetrischen Falle (am benachbarten Feld wechseln die Vorzeichen).

Zahlentafel 8.

Die Nebenspannungen im symmetrischen Fall bezogen auf die Grundspannung, d. h. die Größe $\sigma \frac{e}{h}$ des antisymmetrischen Falles für die Gurtstäbe und für die Diagonalen an den Gurtanschlüssen und an den Kreuzungsknoten. (Zahlenfaktor für die Einzellast.)

Stabbezeichnung	Stabmoment	Knoten Nr. ν	Strenge Rechnung Fall I	II	III	IV	V	Formeln (70) bis (75) III	V
Gurtstäbe	M_l^u	14	0,4179	2,7227	11,3338	1,5321	44,2317	11,6544	47,0398
		13	0,2370	2,4871	11,6317	1,1420	46,3819	11,6680	47,1689
		12	0,0806	2,0956	11,6797	0,4182	47,0984	11,6838	47,3204
		11	0,0228	1,7581	11,7023	0,0620	47,4377	11,7028	47,5008
		2	1,8826	19,9987	89,6537	6,3948	333,751	94,1883	364,033
		1	6,3685	43,4531	175,5905	34,7579	832,870	305,5354	1182,951
	M_r^u	0	3,7801	3,2094	3,16116	0,7394	3,3306	314,6698	1273,804
Diagonalen am Gurtanschluß	M_l^0	14	16,617	82,828	317,345	14,019	250,145	326,480	267,570
		13	7,628	69,662	302,553	8,110	244,878	303,509	249,400
		12	2,299	53,972	280,438	2,431	230,056	280,538	231,229
		11	0,582	41,352	257,557	0,211	212,754	257,568	213,058
		3	0,369	41,797	248,161	1,326	191,781	247,784	186,694
		2	2,123	55,626	274,357	0,301	224,468	270,755	204,864
		1	11,060	81,747	328,138	11,197	298,580	293,725	223,035
	M_r^0	0	2,673	2,269	2,235	5,229	23,551	326,480	267,570
Diagonalen an den Kreuzungsknoten	$M_r'^u$	13	16,617	82,828	317,345	14,019	250,145	321,912	258,858
		12	6,150	66,556	298,464	5,707	238,426	298,942	240,687
		11	1,718	51,262	275,921	1,160	221,930	275,971	222,516
		3	(0,818)	33,687	229,401	(0,460)	177,896	229,381	177,236
		2	(3,077)	44,136	252,540	(3,283)	197,950	252,352	195,406
		1	(9,308)	58,182	277,123	(9,625)	223,379	275,322	213,577
		0	(13,794)	80,429	315,499	(13,640)	269,520	298,293	231,748

Der Einfluß der gleichmäßig verteilten Last wird im symmetrischen Fall bedeutungslos. Die gleichmäßige Durchbiegung erhält man angenähert aus Formel (78). Sie beträgt, auf die Form $\frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$ gebracht, für $n = 14$ in den Fällen I und II rd. $0{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$ und im Falle IV $2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$. Die strenge Rechnung gibt nur wenig kleinere Werte. Unmittelbar an den Störungsstellen, wo sich ein Riegel befindet, schwankt die Durchbiegung entsprechend den Fällen I, IV und II von null bis auf etwa den 1,2-, 1,3- und 1,7-fachen obigen Betrag und geht rasch auf diesen wieder zurück. Die Formel (81) für die Grenzfälle gibt dagegen eine gleichgroß bleibende Schwankung von null bis auf den zweifachen Betrag an.

Die gleichbleibende Gurt- und Diagonalkraft kann aus den Formeln (68) und (69) entnommen werden, sie ist unbedeutend, und die strenge Rechnung gibt nur einen etwas kleineren Wert an.

Die Nebenspannungen aus den Stabbiegungsmomenten werden ebenfalls im Vergleich zum antisymmetrischen Fall ganz unbedeutend. Sind keine Riegel vorhanden, so verschwinden die Nebenspannungen in den Gurten vollständig und die in den Diagonalen können aus der Formel (77) berechnet werden. An den Störungsstellen (Riegel) können sie aus den Formeln (79) und (80) für die Grenzfälle entnommen werden, wobei zu beachten ist, daß man dann in praktischen Fällen etwa doppelt zu große Werte erhält, und daß diese rasch auf die ungestörten Werte zurückgehen.

7. Schlußfolgerungen. Die strenge Ermittlung der Spannungen im Rhombenfachwerk kann im antisymmetrischen Belastungsfall mit Hilfe der mit der strengen Rechnung gut übereinstimmenden geschlossenen Formeln (28) bis (35) geschehen. Im symmetrischen Belastungsfall kann für die gleichmäßig verteilte Last die Beanspruchung ebenso genau genug nach den angegebenen Formeln (68), (69) und (77), (79), (80) bestimmt werden, dagegen ist für die Einzellast eine strenge Rechnung durchzuführen. Die hier für die Grenzfälle angegebenen mit der strengen Rechnung ebenfalls gut ühereinstimmenden Formeln (68) bis (75), welche genau dem üblichen Verfahren der Nebenspannungsberechnung unter Zugrundelegung eines idealen Fachwerkes entsprechen, geben so übertrieben große Werte, daß sie auch sogar nur für die Abschätzung der Größenordnung für die praktischen Fälle ganz unbrauchbar werden. Auch die angenäherte Abschätzung kann nur, wie es hier geschehen ist, auf Grund einer strengen Rechnung erfolgen. Die strenge Berechnung eines Rhombenfachwerkes ist somit auf den einfachsten Fall einer symmetrisch zur Trägerlängsachse angeordneten Einzellast zurückgeführt.

Wie aus dem Vergleich der Nebenspannungen folgt, ist es zweckmäßig, die Riegel über den Stützen einzusetzen, im Feld können sie besser wegbleiben. Solange die Schlankheit $\left(\frac{l}{i}\right)$ der einzelnen Fachwerkstäbe unterhalb 100 bleibt, verhält sich das Rhombenfachwerk in bezug auf die Nebenspannungen noch „vernünftig".

8. Die Spannungsermittlung für den gedrückten Träger. Formeln. Angeregt durch die Arbeiten von v. Mises[9]) und Ratzersdorfer ist ursprünglich dieser Abschnitt zum Ausgangspunkt der vorhergehenden geworden. Bei Berücksichtigung der Normalkraft N ändern sich die Koeffizienten in den Beziehungen (1) wie folgt ab (Abb. 1)

$$\left.\begin{aligned} M_\nu &= \frac{2\,E\,J}{s}\left[\psi_1\,\gamma_\nu + \psi_2\,\gamma_{\nu+1} - (\psi_1+\psi_2)\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + (\psi_1+\psi_2)\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right] \\ M_{\nu+1} &= \frac{2\,E\,J}{s}\left[\psi_2\,\gamma_\nu + \psi_1\,\gamma_{\nu+1} - (\psi_1+\psi_2)\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + (\psi_1+\psi_2)\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right] \\ Q_\nu &= -Q_{\nu+1} = \frac{2\,E\,J}{s^2}(\psi_1+\psi_2)\left[\gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} - 2\,\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta + 2\,\frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right] \end{aligned}\right\} \quad (1a).$$

Entsprechend ändern sich auch die Beiwerte bei den noch hinzukommenden Gliedern, wenn der Stab noch innerhalb seines Feldes belastet ist. Außerdem ist bei der Bildung der Gleichgewichtsgleichungen zu beachten, daß zu den Querkräften Q noch die Komponenten aus der Normalkraft N infolge der Stabdrehung hinzukommen

$$\pm\,N\left(\frac{v_{\nu+1}-v_\nu}{s}\cos\vartheta - \frac{u_{\nu+1}-u_\nu}{s}\sin\vartheta\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1b).$$

[9]) R. v. Mises, ZAMM, Bd. 3, 1923, S. 406. Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. — R. v. Mises und J. Ratzersdorfer, ZAMM, Bd. 5, 1925, S. 218; Bd. 6, 1926, S. 181.

Ist N eine Druckkraft, so ist übereinstimmend mit der Zimmermannschen[10]) Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1 = \frac{0{,}5\, t\, \alpha^2}{t^2 - s_1^{\,2}}, \qquad \psi_2 = \frac{0{,}5\, s_1\, \alpha^2}{t^2 - s_1^{\,2}} \\ \text{mit} \qquad &\alpha^2 = \frac{N s^2}{E J}, \qquad t = 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}, \qquad s_1 = \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (82)$$

zu setzen, wobei für $\alpha = 0 \lim\limits_{\alpha \to 0} \psi_1 = 2$ und $\lim\limits_{\alpha \to 0} \psi_2 = 1$ wird. Ist N eine Zugkraft, so erhält man bekanntlich ähnliche Ausdrücke mit hyperbolischen Funktionen.

Um auch die Kombination von Druck und Biegung zu erhalten, wird der Fall einer exzentrischen Druckkraft $2\,K$ mit einer Querbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Knotenlast P vorausgesetzt. Unter gewissen Vernachlässigungen, die jedoch höherer Ordnung sind, kann man auch hier den allgemeinen Belastungsfall in den antisymmetrischen (Abb. 12), mit den beiden Druckkräften in den Gurten $K(1 \pm \varepsilon)$, was mit einer aus der Mittellinie des Trägers um das Maß εh verschobenen Druckkraft $2\,K$ gleichbedeutend ist, und den symmetrischen mit gleichen Gurtkräften K oder einer zentrischen Druckkraft $2\,K$ zerlegen. Im symmetrischen Fall wird unter dem Formänderungs- und Spannungszustand genau derjenige verstanden, wie er bei Belastung des ursprünglich spannungslosen Trägers entsteht. Im antisymmetrischen Fall überlagert sich dagegen der Formänderungs- und Spannungszustand über diesen, oder strenger über einen fingierten, bei dem die Gurtstäbe des unverformten Trägers bereits unter der Spannung $\sigma_k = \dfrac{K}{F_1}$ (83) stehen, und wird nur durch die hinzutretenden Kräftepaare an den Enden $2\,K \varepsilon h$ und die Querbelastung hervorgerufen. Der wirkliche Formänderungs- und Spannungszustand im allgemeinen Fall setzt sich aus diesen beiden zusammen.

Unter Anwendung der Formeln (1a) auf die Gurtstäbe und der Formeln (1) auf die Diagonalen erhält man in derselben Weise dieselben Gleichungssysteme mit denselben Beziehungen (12) und (44) wie in den vorhergehenden Fällen.

Im Gleichungssystem (2a) bis (6a) des antisymmetrischen Falles ändern sich die Beiwerte nur bei der Gleichung (3a)

$$\left.\begin{aligned} 2\left(\psi_1 + 2\varrho\right)\gamma_\nu + \psi_2 \gamma_{\nu-1} + \psi_2 \gamma_{\nu+1} + \varrho \beta_{\nu-1} + \varrho \beta_\nu - (\psi_1 + \psi_2)\frac{s}{\lambda} \cdot \frac{w_{\nu+1} - w_\nu}{s} & \\ - 3\varrho \frac{\lambda}{2s} \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{s} - 6\varrho \frac{h}{s}\frac{u_\nu}{s} = 0 & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3b)$$

und (5a), wo noch die Glieder aus der Berücksichtigung der Normalkraft $\left(\dfrac{\sigma_k}{E}\right)$ hinzutreten

$$\left.\begin{aligned} -2\left[\frac{h^2}{s^2} + 4(\psi_1 + \psi_2)\frac{s}{\lambda}\varrho_1 + 3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2 - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{\sigma_k}{E}\right]\frac{w_\nu}{s} + \left[4(\psi_1 + \psi_2)\frac{s}{\lambda}\varrho_1 - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{\sigma_k}{E}\right]\frac{w_{\nu-1} + w_{\nu+1}}{s} & \\ + \left(\frac{h^2}{s^2} + 3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2\right)\frac{v_{\nu-1} + v_\nu}{s} + 2(\psi_1 + \psi_2)\varrho_1(\gamma_{\nu-1} - \gamma_{\nu+1}) + 3\frac{\lambda}{s}\varrho_2(\beta_{\nu-1} - \beta_\nu) = \frac{P}{2\,E\,F_2} & \end{aligned}\right\} (5b).$$

Dementsprechend ändert sich auch die Systemdeterminante, die ihrer Bedeutung wegen noch angeschrieben wird, wobei jedoch der Einfachheit halber nur die veränderten Glieder angeführt und die gleichgebliebenen durch ein Kreuz gekennzeichnet sind.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{A}{\times} & \overset{A'}{\times} & \overset{B}{\times} & \overset{C}{\times} & \overset{C'}{0} \\ \psi_2\zeta^2 + 4\left(\dfrac{\psi_1}{2} + \varrho\right)\zeta + \psi_2 & \times & \times & (\psi_1 + \psi_2)\dfrac{s}{\lambda}(1 - \zeta^2) & \times \\ \times & 0 & \times & \times & \times \\ 2\varrho_1(\psi_1 + \psi_2)(1 - \zeta^2) & \times & 0 & \begin{aligned} \Big[4(\psi_1 + \psi_2)\eta_1\varrho_1\frac{s}{\lambda}\zeta^2 - 2\left(\frac{h^2}{s^2} + 3\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2 + 4(\psi_1 + \psi_2)\eta_1\varrho_1\frac{s}{\lambda}\right)\zeta \\ + 4(\psi_1 + \psi_2)\eta_1\varrho_1\frac{s}{\lambda}\Big] \end{aligned} & \times \\ \times & \times & \times & 0 & \times \end{vmatrix}$$

mit der Abkürzung
$$\eta_1 = 1 - \frac{\varrho_3}{4(\psi_1 + \psi_2)\varrho_1} \cdot \frac{\sigma_k}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84).$$

[10]) H. Zimmermann, Knickfestigkeit der Stabverbindungen. Berlin 1925, W. Ernst u. Sohn.

Im symmetrischen Fall, Gl. (38) bis (41), ändern sich die Beiwerte bei der Gl. (38)

$$\left.\begin{aligned}&\psi_2 \gamma_{\nu-1} + 2(\psi_1 + 2\varrho)\gamma_\nu + \psi_2 \gamma_{\nu+1} - (\psi_1 + \psi_2)\frac{s}{\lambda}\frac{w_{\nu+1} - w_{\nu-1}}{s}\\ &\qquad + 3\frac{h}{s}\varrho \cdot \frac{u_{\nu-1}' + u_\nu'}{s} - 6\frac{h}{s}\varrho\frac{u_\nu}{s} = 0\end{aligned}\right\} \quad (38a)$$

und (40)

$$\left.\begin{aligned}&-\left[2\frac{h^2}{s^2} + 8(\psi_1 + \psi_2)\varrho_1\frac{s}{\lambda} + 6\frac{\lambda^2}{s^2}\varrho_2 - 2\frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{\sigma_k}{E}\right]\frac{w_\nu}{s} + \left[4(\psi_1 + \psi_2)\frac{s}{\lambda}\varrho_1 - \frac{s}{\lambda}\varrho_3\frac{\sigma_k}{E}\right]\frac{w_{\nu-1} + w_{\nu+1}}{s}\\ &+ \frac{h\lambda}{2s^2}(1 - 12\varrho_2)\frac{u_\nu' - u_{\nu-1}'}{s} - 2(\psi_1 + \psi_2)\varrho_1(\gamma_{\nu+1} - \gamma_{\nu-1}) = \frac{P}{2EF_2}\end{aligned}\right\} \quad (40a).$$

Analog ändern sich in beiden Fällen die Beiwerte in den Kontroll- und Randgleichungen, die der Kürze halber nicht mehr angeschrieben werden.

Abb. 12. Der antisymmetrische Fall. Hauptfall IV, $n = 14$.

Im antisymmetrischen Fall sind die wesentlicheren Teile in der homogenen Lösung enthalten, insbesondere in den beiden Gliedern $C_1 \sin\nu\varphi$ und $C_2 \cos\nu\varphi$, welche der komplexen Einheitswurzel der charakteristischen Gleichung $\Delta = 0$ zugeordnet sind. Man kann nun ähnlich dem Vorhergehenden auch hier eine angenäherte Lösung konstruieren, wenn man neben den Gliedern der partikulären Lösung noch diese beiden Glieder aus der homogenen Lösung beibehält. Mit der Gl. (17) entsprechenden Abkürzung

$$1 + (\psi_1 - \psi_2)\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\cdot\frac{\lambda^2}{h^2} + \frac{\varrho_2}{\varrho_3}\frac{s\lambda}{h^2}\cdot\frac{2 + \frac{3}{2}\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}}{1 + 3\varrho_2\frac{\lambda^2}{h^2}} = \Phi \quad (17a)$$

erhält man für den beiderseits gelenkig gestützten Träger nach Abb. 12 für die Ordinaten w_ν der Gurtbiegungslinie

$$w_\nu = \varepsilon h\frac{2\sin\frac{\nu\varphi}{2}\sin\frac{(n-\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}} + \frac{P\lambda^3}{16EF_1h^2}\cdot\frac{E}{\sigma_k}\cdot\left[\frac{4h^2}{\lambda^2}\cdot\frac{E}{\sigma_k}\cdot\frac{\sin\frac{\nu\varphi}{2}\sin\frac{(n-\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}} - \nu(n-\nu)\right] \quad (85).$$

Für die Normalspannung σ_u im Untergurtstab ν, $\nu + 1$ findet man

$$\sigma_{u_{\nu,\nu+1}} = \varepsilon\sigma_k\gamma^2\cdot\frac{\cos\frac{(n-2\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}} + \frac{E}{\sigma_k}\cdot\frac{1}{2\left[\left(n-\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right]}\left[\Phi\gamma^2\cdot\frac{\cos\frac{(n-2\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}} - 1\right]\frac{M_\nu^m}{2hF_1} \quad (86),$$

wo für ν die Nummern der Diagonalkreuzungspunkte und für M_ν^m das Biegungsmoment infolge der gleichmäßig verteilten Belastung auf diese bezogen einzusetzen sind. Für die im Kreuzungspunkt ν sich schneidenden Diagonalen erhält man die Normalspannung σ_d aus

$$\sigma_{d\nu} = \pm\varepsilon\sigma_k\cdot\frac{s}{h}\cdot\gamma^3\varrho_3\sqrt{\frac{\sigma_k}{E}}\cdot\frac{\sin\frac{(n-2\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}} \pm \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}}\cdot\frac{\lambda\gamma^3\Phi}{2h(n-2\nu-1)}\cdot\frac{\sin\frac{(n-2\nu)\varphi}{2}}{\cos\frac{n\varphi}{2}}\cdot\frac{Q_\nu s}{2hF_2} \quad (87).$$

Für die Nebenrandspannungen aus den Stabbiegungsmomenten kann man bei den Gurtstäben

$$\sigma = \pm\sigma_u\cdot\frac{e}{h} \quad (88)$$

annehmen, und bei den Diagonalstäben an den Kreuzungsknoten, wo sie am größten sind, hat man

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\nu &= \pm\,\varepsilon\,\sigma_k \cdot \frac{e}{h} \cdot 2\,\frac{\lambda}{s}\,\gamma^2 \cdot \frac{\cos\dfrac{\left(n-2\nu-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2}}{\cos\dfrac{n\varphi}{2}} \\ &\pm \frac{E}{\sigma_k} \cdot \frac{\lambda^2}{(n-2\nu-1)\,s^2\,\varrho_3}\left[\Phi\,\gamma^2\,\frac{\cos\dfrac{\left(n-2\nu-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2}}{\cos\dfrac{n\varphi}{2}} - 1\right]\frac{Q_\nu\,s}{2\,h\,F_2} \cdot \frac{e}{h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (89)$$

mit der Beziehung

$$\varphi = \gamma\,\frac{\lambda}{h}\sqrt{\frac{\sigma_k}{E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (90).$$

Diese Formeln sind sehr empfindlich in bezug auf die Größe φ, die genau aus der charakteristischen Gleichung $\Delta = 0$ gefunden wird. Die Größe γ, die sodann aus der Beziehung (90) folgt, entspricht dem in der üblichen Theorie[11]) der Knickung gegliederter Stäbe bekannten Abminderungsfaktor, so daß man φ auch angenähert ermitteln kann, indem man γ von dort entnimmt. Für das hier durchgerechnete Beispiel $\left(\text{Hauptfall IV}, \sigma_k = 2100\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},\right.$ $\left.E = 2{,}1 \cdot 10^6\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$ sind die genauen Werte: $\varphi = 3^0\,38'\,00''$, $\gamma = 1{,}00266$. Nach der Bleichschen[11]) Formel erhält man $\gamma = 1{,}014043$, $\varphi = 3^0\,40'\,28''$; setzt man entsprechend einem Vollstabe $\gamma = 1$, so wird $\varphi = 3^0\,37'\,25''$.

Das strenge Knickkriterium folgt aus der Forderung des gleichzeitigen Verschwindens der Systemdeterminante und der Determinante der Randgleichungen. Angenähert kann man sich mit dem Verschwinden der Systemdeterminante, d. h. mit der charakteristischen Gleichung, begnügen und erhält so zu einer Druckspannung σ_k die zugehörige Knickfelderanzahl n_k, somit auch die Knicklänge $l_k = n_k \cdot \lambda$, aus der Beziehung

$$n_k = \frac{\pi}{\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (91).$$

In unserem Zahlenbeispiel wird $n_k = \frac{180^0}{3^0\,38'} = \sim 49$. Da die strenge Rechnung für $n = 14$ durchgeführt worden ist, blieb der Einfluß der Druckkraft an sich unerheblich, weshalb die Zahlenergebnisse der Kürze halber nicht mitgeteilt werden. Es genüge die Bemerkung, daß die Formeln in diesem Bereich, insbesondere wenn für φ der genaue Wert eingesetzt wird, mit der strengen Rechnung gut übereinstimmen. Es ist jedoch möglich, daß für andere Verhältnisse und beim Einsetzen eines angenähert ermittelten φ stärkere Abweichungen auftreten können, da wir uns bei der Aufstellung derselben auch noch einige weitere Vereinfachungen erlaubt haben.

Es wird noch betont, daß die Formeln nur für den elastischen Bereich aufgestellt sind und nur zur Abschätzung der tatsächlichen Spannung dienen sollen. Für die Beurteilung der Sicherheit müssen infolge Überschreitens der Proportionalitätsgrenze verschiedene Elastizitätsmoduli für die beiden Gurte entsprechend der Spannungs-Dehnungskurve des Materials schätzungsweise eingeführt werden, was nur darauf hinausläuft, daß man sich des antisymmetrischen Falles nicht mehr bedienen kann und daß somit die Anzahl der Unbekannten von fünf auf neun wächst, genau so wie für den Fall verschiedener Querschnittsabmessungen der beiden Gurte. Eine für die Praxis wünschenswerte genauere Berücksichtigung des Formänderungsgesetzes des Materials, wie sie z. B. in neuerer Zeit von Chwalla[12]) für den Vollstab mit Rechteckquerschnitt durchgeführt worden ist, bedarf einer besonderen Untersuchung.

Der symmetrische Fall wird unbedeutend. Die Gurtspannung aus der strengen Rechnung weicht nur sehr wenig von σ_k ab, die Spannung in den Diagonalen bleibt sehr klein bis auf die Trägerenden, wo sie für unser Beispiel die Größe $0{,}15\,\sigma_k$ erreicht. Die Nebenspannung infolge der Knotensteifigkeit beträgt für die Diagonalen angenähert $\sigma_k\,\frac{e}{h} \cdot 3\,\frac{\lambda}{s}$, welcher Betrag an den Trägerenden bis auf das 1,5fache anwächst. Für die Gurte verschwindet die Nebenspannung fast gänzlich bis auf die Trägerenden, wo sie noch unter dem Werte $0{,}9\,\sigma_k\,\frac{e}{h}$ bleibt. —

[11]) F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. S. 147. Formel 15''. Berlin 1924, Springer.

[12]) E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. in Wien, 1928, Abt. IIa, S. 469. — Siehe noch: R. Krohn, Knickfestigkeit, Bautechnik 1923, S. 230. — M. Roš u. J. Brunner, Die Knicksicherheit von usw. Verh. d. 2. Internat. Kongr. f. tech. Mech. Zürich 1926, Orell Füßli. — W. Rein, Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Berlin 1930, J. Springer.

Über Zermelo's Luftfahrtproblem[1].

Von *T. Levi-Civita* in Rom.

In seinem schönen Prager Vortrag[2]) hat Herr Zermelo folgende Frage gestellt und in eigenartiger Weise gelöst:

In einer unbegrenzten Ebene, in welcher die Windverteilung durch ein Vektorfeld $\mathbf{w}\,(P, t)$, als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist, bewegt sich ein Fahrzeug P mit einer konstanten Eigengeschwindigkeit V relativ zur umgebenden Luftmasse. Wie muß das Fahrzeug gesteuert (oder seine Bahn gewählt) werden, um in kürzester Zeit von einem Punkte P_0 zu einem anderen P_1 zu gelangen?

Die direkte und elegante Behandlung von Zermelo ist sehr interessant. Es scheint mir jedoch der Mühe wert, zu zeigen, daß die mathematische Lösung der gestellten Frage auch auf die übliche Form der Variationsaufgaben zurückgeführt werden kann, und namentlich (im Falle eines nicht zu starken Windes) auf die einfachste der sogenannten Mayerschen Aufgaben[3]), welche u. a. die Anwendung des Fermatschen Prinzips, für einen mit der Zeit (und Richtung) veränderlichen Brechungsindex, umfassen. In dieser Weise bekommt man von selbst die Lösung der nämlichen Frage auch für drei (und mehrere) Dimensionen, und gelangt schließlich zu Formeln, die, für $n = 2$ und $n = 3$ (Ebene oder gewöhnlicher Raum), mit denjenigen von Zermelo wesentlich zusammenfallen, jedoch allgemeiner und übersichtlicher gestaltet sind. Um die Erläuterung der Lösung nicht unterbrechen zu müssen, wird es sich empfehlen, zuerst eine wohlbekannte Identität vorauszuschicken.

1. Vorbemerkung.

Es seien $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ n Argumente, die wir als (unbekannte) Funktionen von t berücksichtigen werden; $\dot{x}_i$ ihre Ableitungen;

$$L\,(x \mid \dot{x} \mid t)$$

eine Funktion der $2n + 1$ bezeichneten Argumente, wo x als eine Abkürzung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ steht, und ebenso $\dot{x}$ für $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$. Wir werden, wie üblich, reguläres Verhalten annehmen, d. h. L und seine Ableitungen erster und zweiter Ordnung endlich und stetig, für sämtliche zu betrachtenden Werte der Argumente, voraussetzen.

Setzt man

$$B_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$H = \sum_{1}^{n}{}_i\, \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

so erkennt man in den B_i die auf die Funktion L sich beziehenden Lagrangeschen Binome, und in H die zugehörige Hamiltonsche Funktion. Die Identität, welche wir nachher benutzen werden, ist:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_i\, B_i\, \dot{x}_i = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Sie ergibt sich ohne weiteres aus (2) durch totale Ableitung nach t, indem man (1) berücksichtigt.

2. Zermelo's Problem — Zurückführung auf eine Mayersche Aufgabe.

Um die Ideen zu fixieren, sei an $n = 3$ (oder $n = 2$) gedacht und seien die x_i als gewöhnliche kartesische Koordinaten betrachtet. Gleichwohl fahren wir fort, n-dimensionale Formeln zu schreiben.

[1]) Siehe den Artikel „Über Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung", S. 114—123 dieses Bandes.

[2]) Zusammenfassender Bericht im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 39 (Heft 5—8), 1930, S. 44—48 (Zweite Abt.), aus welchem die vorliegenden Bemerkungen entstanden sind.

[3]) Vgl. A. Kneser, „Lehrbuch der Variationsrechnung" (zweite Auflage), Braunschweig, Vieweg, 1925; §§ 41—42, S. 256 u. f.

Es seien $w_i\,(x\,|\,t)$ die gegebenen Komponenten der Windgeschwindigkeit; α_i die (unbekannten) Richtungskosinusse der Eigengeschwindigkeit des Fahrzeuges (vom konstanten, absoluten Betrage V); $\frac{d\,x_i}{d\,t}$ die Komponenten seiner absoluten Geschwindigkeit. Das Prinzip der Addition der Geschwindigkeiten wird durch die Formeln

$$\frac{d\,x_i}{d\,t} - w_i = V\,\alpha_i \qquad (i = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

ausgedrückt. Eliminiert man die α_i vermöge der Indentität $\sum_1^n{}_i\,\alpha_i^2 = 1$, und führt die Bezeichnungen

$$\psi_d = \sum_1^n{}_i\,w_i\,d\,x_i \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$w^2 = \sum_1^n{}_i\,w_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i\,dx_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ein, so bekommt man

$$\frac{ds^2}{dt^2} + w^2 - 2\,\frac{\psi_d}{dt} = V^2,$$

oder

$$(V^2 - w^2)\,d\,t^2 + 2\,\psi_d\,dt - ds^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Während der Bewegung des Fahrzeuges muß immer $dt > 0$ ausfallen. Die Gl. (7), welche quadratisch in dt ist, bestimmt dieses dt unbedingt, als positive und reguläre Funktion der übrigen Argumente, sicher dann, wenn

$$V^2 - w^2 > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

d. h. im normalen Falle, wo die Eigengeschwindigkeit V (im absoluten Werte) die des Windes übertrifft. Sonst werden ergänzende Betrachtungen erforderlich, welche die direkte Zermelosche Methode mit großer Eleganz vermeidet.

Unter der Selbständigkeitsbedingung (8), ergibt sich unzweideutig aus (7)

$$d\,t = L_d\,(x\,|\,d\,x\,|\,t) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'),$$

wo

$$L_d(x\,|\,d\,x\,|\,t) = \frac{-\psi_d + \sqrt{\psi_d^2 + (V^2 - w^2)\,d\,s^2}}{V^2 - w^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

eine in bezug auf die $d\,x_i$, nach (4) und (6), homogene Funktion ersten Grades bezeichnet; von der Quadratwurzel ist der absolute Wert zu verstehen; und

$$\psi_d^2 + (V^2 - w^2)\,d\,s^2$$

eine positiv-definite quadratische Form der Argumente $d\,x_i$ bildet. Nebenbei sei bemerkt, daß, gemäß (4),

$$\frac{\psi_d}{ds} = \sum_1^n{}_i\,w_i\,\frac{dx_i}{d\,s}$$

die longitudinale, d. h. zur Bewegungsrichtung gehörige, Komponente der Windgeschwindigkeit bedeutet, so daß $w^2 - \frac{\psi_d^2}{d\,s^2}$ nichts anderes ist als das Quadrat der transversalen Windgeschwindigkeit w^*. Die Größe unter dem Wurzelzeichen in (9) läßt sich folglich $d\,s^2\,(V^2 - w^{*2})$ schreiben, woraus wieder ersichtlich wird, daß sie, wegen (8), immer positiv ausfällt.

Wegen der Homogenität ersten Grades von $L_d(x\,|\,dx\,|\,t)$ und ψ_d, in bezug auf die dx_i, bekommt man, aus (4) und (9), indem man beide Glieder durch dt dividiert,

$$\psi = \frac{\psi_d}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i\, w_i \dot{x}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'),$$

$$L(x\,|\,\dot{x}\,|\,t) = \frac{L_d}{dt} = \frac{-\psi + \sqrt{\psi^2 + (V^2 - w^2)v^2}}{V^2 - w^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'),$$

wo, selbstverständlich,

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \sum_{1}^{n}{}_i\, \dot{x}_i^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6').$$

Wenn man die Neigung der Bahn gegen die Windrichtung mit Θ bezeichnet, hat man einfach

$$\psi = v\,w \cos\Theta,$$

und folglich

$$L = v\,\frac{-w\cos\Theta + \sqrt{V^2 - w^2\sin^2\Theta}}{V^2 - w^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9'').$$

Die Fahrzeit von P_0 bis P_1 läßt sich durch

$$T = \int_{P_0 P_1} L_d(x\,|\,d\boldsymbol{x}\,|\,t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

darstellen, wo die Integration längs der (unbekannten) Bahn auszuführen ist.

Betrachtet man, wie es in der Natur der Sache liegt, als Bildraum, gerade den Raum $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wo die Bewegung des Flugzeuges stattfindet, so empfiehlt es sich, für die Bahn eine parametrische Darstellung

$$x_i = x_i(\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

einzuführen und außerdem zu fordern (was übrigens τ noch nicht eindeutig festlegt), daß, wenn τ die Strecke $0 \vdash\!\dashv 1$ wachsend durchläuft, die tatsächliche Folge der vom Flugzeuge durchgegangenen Lagen wiedergegeben wird.

Die Zeit t wird dann, als Funktion von τ, durch

$$dt = L_d(x\,|\,dx\,|\,t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

oder, was, wegen (9') auf dasselbe hinauskommt, durch

$$L(x\,|\,\dot{x}\,|\,t) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'')$$

eindeutig definiert, falls man den Augenblick der Abfahrt noch angibt, d. h. $t = t_0$ für $\tau = 0$ als bekannt voraussetzt.

Die Aufgabe ist nun, die Bahn (11) so zu bestimmen, daß das bestimmte Integral (10) zum Minimum wird.

3. Bewegungsgleichungen.

Soll T ein Extremum besitzen, so muß die Variation verschwinden, wenn man von (11) zu einer benachbarten Bahn $x_i = x_i(\tau) + \delta x_i$ übergeht, wo die unendlich kleinen Zuwächse δx_i als ganz willkürliche (stetig derivierbare) Funktionen von τ im Intervalle $0 \vdash\!\dashv 1$ zu betrachten sind, mit der einzigen Beschränkung, daß sie in den festen Endpunkten P_0 und P_1, d. h. für $\tau = 0$ und $\tau = 1$, verschwinden müssen. Die zugehörige Variation δt von t ist aus (7) oder (7') zu entnehmen, mit der Anfangsbedingung $\delta t = 0$ für $\tau = 0$. Wegen der Vertauschbarkeit der Differentialsymbole d und δ bekommt man aus (7')

$$d\,\delta t - \delta L_d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Der explizite Ausdruck von δT wird von (10) geliefert unter der Form

$$\delta T = \int_{P_0 P_1} \delta L_d\,.$$

Nach Lagrange ist die Bedingungsgleichung (12) zu berücksichtigen, indem man einen unbestimmten Multiplikator, den wir (statt λ, wie gewöhnlich) mit $1-\lambda$ bezeichnen werden, einführt und unter dem Integralzeichen $(1-\lambda)\,(d\,\delta t-\delta L_d)$ addiert. Entsprechend kann man schreiben

$$\delta T=\int_{P_0P_1}(1-\lambda)\,d\,\delta t+\int_{P_0P_1}\lambda\,\delta L_d,$$

wo

$$\delta L_d=\sum_1^n{}_i\left\{\frac{\partial L_d}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_d}{\partial\, d x_i}d\,\delta x_i\right\}+\frac{\partial L_d}{\partial t}\delta t.$$

Führt man in den Gliedern mit $d\,\delta t$, $d\,\delta x_i$ partielle Integration aus, und beachtet, daß jedes $\delta x_i=0$ an beiden Enden des Integrationsbogens, dagegen δt gleich Null am unteren, und gleich δT am oberen ist, so bekommt man

$$\lambda\,\delta T=\int_{P_0P_1}\left|\left\{d\,\lambda+\lambda\frac{\partial L_d}{\partial t}\right\}\delta t+\sum_1^n{}_i\left\{-d\left(\lambda\frac{\partial L_d}{\partial(d x_i)}\right)+\lambda\frac{\partial L_d}{\partial x_i}\right\}\delta x_i\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Für $\lambda=0$ reduziert sich diese Gleichung auf eine bloße Identität. Damit sie δT bestimmt, muß man $\lambda\neq 0$ annehmen und über seinen Wert in der Weise verfügen, daß der Koeffizient von δt unter dem Integralzeichen verschwindet. So haben wir

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{\partial L_d}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14),$$

womit, wegen der Willkürlichkeit der δx_i ergibt sich aus (13), daß, damit $\delta T=0$, die n Gleichungen

$$d\left(\lambda\frac{\partial L_d}{\partial(d x_i)}\right)-\lambda\frac{\partial L_d}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

zusammen mit (14) bestehen müssen.

Begrifflich haben wir immer τ als unabhängige Veränderliche zu betrachten. Tatsächlich aber kommt τ in den Endgleichungen (14), (15) durchaus nicht vor. Wir dürfen somit von dieser Hilfsvariabel einfach absehen, und die vom Hause aus dazu bestimmte Größe, die Zeit t, als unabhängige Veränderliche ansehen.

Da L_d homogen ersten Grades in den $d x_i$ ist, und $L(x\,|\,\dot x\,|\,t)=\frac{L_d}{dt}$, so hat man

$$\frac{\partial L}{\partial t},\quad \frac{1}{dt}\frac{\partial L_d}{\partial x_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i},\quad \frac{\partial L_d}{\partial(d x_i)}=\frac{\partial L}{\partial \dot x_i},$$

und folglich aus (14) und (15), indem man durch dt dividiert,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14'),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right)-\lambda\frac{\partial L}{\partial x_i}=0.$$

Führt man in diesen letzten Gleichungen die Ableitung nach t aus, und ersetzt, nach Division durch λ, $\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt}$ durch seinen Wert (14′), so bekommt man die endgültige Form der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I})$$

welche in Verbindung mit der ursprünglichen Definition (7) oder (7′) oder (7″) von t, d. h.

$$L(x\,|\,\dot x\,|\,t)=1 \quad . \; . \quad (\mathrm{II})$$

bestehen müssen.

4. Vereinbarkeit von (I) und (II) — Normalform.

Die Zahl der Gl. (I) und (II) ist insgesamt $n+1$. Man kann aber unmittelbar zeigen, daß sie miteinander verträglich sind. In der Tat läßt sich das System (I)$_1$ durch Benutzung der Lagrangeschen Binome B_i, auch schreiben

$$B_i = \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i},$$

woraus, in Verbindung mit der Identität (3) und $H=0$ (letzteres, wegen der Homogenität ersten Grades von L), folgt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}\sum_1^n {}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial t}(L-1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Das Differentialsystem (I) zieht also entweder $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ oder $L=1$ nach sich.

Jedenfalls ist es gestattet, die weitere Bedingung (II), d. h. $L=1$, mit (I) zu verbinden.

In der Tat, wenn $\frac{\partial L}{\partial t}$ nicht identisch verschwindet, so geht (II) aus (16) hervor; wenn dagegen L die Zeit t nicht explizit enthält, so ist bekanntlich[1]) $L=$ konst., und insbesonders $L=1$, mit (I) verträglich.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß, wenn L Homogenität ersten Grades besitzt, das Differentialsystem (I) in den n Funktionen $x_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, nicht normal ist, in dem Sinne, daß es sich nicht auflösen läßt in bezug auf die n Ableitungen zweiter Ordnung $\ddot{x}_k$. Um dieses einzusehen, genügt es zu beachten, daß in der i^{ten} Gl. (I) die Glieder, welche die $\ddot{x}$ enthalten, sich auf

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k$$

reduzieren, und die Auflösung im Bezug auf die $\ddot{x}_k$ nicht gestattet ist, weil die Hessesche Determinante

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_k} \right\|$$

identisch verschwindet, sobald L homogen ersten Grades in den $\dot{x}$ ist, d. h. sobald

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L = 0 .$$

Durch Ableitung nach $\dot{x}_k$ folgt nämlich

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_k}\dot{x}_i = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

was $\Delta = 0$ verlangt.

Es ist jedoch möglich, vermöge (II) aus dem Systeme (I) ein neues Normalsystem abzuleiten.

Dazu genügt es zu bemerken, daß, wenn man zur Abkürzung

$$L' = \frac{1}{2} L^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

setzt, und $L=1$ berücksichtigt, man (I) durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = \frac{\partial L'}{\partial t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I}')$$

ersetzen kann.

[1]) Vgl. z. B. Levi-Civita und Amaldi, „Lezioni di Meccanica razionale", Bd. II, zweiter Teil, S. 452 (Bologna, Zanichelli).

Folglich ist (I), (II) mit (I') und

$$L' = \frac{1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{II}')$$

gleichbedeutend.

Nun ist L' homogen zweiten Grades in den $\dot{x}$, und so wird (I') normal (wenigstens im allgemeinen, und speziell für die uns interessierenden Fälle). Andererseits, aus (I'), wegen (3), folgt notwendigerweise (da hier $H = L'$ zu setzen ist)

$$\frac{dL'}{dt} - \frac{\partial L'}{\partial t} + \frac{\partial L'}{\partial t} \sum_1^n {}_i \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \frac{dL'}{dt} + 2\frac{\partial L'}{\partial t}\left(L' - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

d. h.
$$\frac{d}{dt}\left(L' - \frac{1}{2}\right) = -2\frac{\partial L'}{\partial t}\left(L' - \frac{1}{2}\right),$$

was uns besagt, daß (II') die Eigenschaft einer, im Bezug auf das Differentialsystem (I'), invarianten Gleichung besitzt. Sie braucht nur von den Anfangswerten befriedigt zu werden, um nachher notwendig zu bestehen. Man kann somit als mathematische Endformulierung des Problems bloß das normale Differentialsystem (I') betrachten, mit der Anfangsbedingung (II') [oder (II)].

Die $2n$ Integrationskonstanten und die Fahrzeit T sind somit insgesamt ebensovielen, d. h. $2n+1$ Bedingungen unterworfen: (II) zu befriedigen für $t = t_0$ und die Bahn durch P für $t = t_0$, durch P_1 für $t = t_0 + T$ hindurchgehen zu lassen.

5. Einfachere Normalform, wo die relative Geschwindigkeit wieder zum Vorschein kommt.

Gemäß (7) und (7') ist L_d die positive Wurzel der Gleichung zweiten Grades

$$(V^2 - w^2) L_d^2 + 2\psi_d L_d - ds^2 = 0.$$

Dividiert man dieselbe durch dt^2, mit Berücksichtigung von (4'), (9') und (6'), so bekommt man unmittelbar

$$(V^2 - w^2) L^2 + 2\psi L - v^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Es ist nunmehr bequem, nicht an den expliziten Ausdruck (9'') der Lagrangeschen Funktion $L(x \mid \dot{x} \mid t)$ anzuknüpfen, sondern an die implizite Gl. (19).

Wenn z irgendein der in L vorkommenden Argumente (x, $\dot{x}$ oder t) bezeichnet, so hat man aus (19) (wo jedenfalls V eine Konstante bedeutet)

$$[(V^2 - w^2) L + \psi] \frac{\partial L}{\partial z} = L^2 \frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial z} - L\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z}.$$

Während der Bewegung, $L = 1$; man kann daher, zur Umformung der Bewegungsgleichungen, diesen besonderen Wert von L sowohl in (19) wie in der soeben gewonnenen Identität einführen.

So bekommt man

$$\psi = \frac{1}{2}(v^2 + w^2 - V^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19')$$

und

$$(V^2 - w^2 + \psi)\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

wo, unter w^2, ψ und v^2 die Ausdrücke (5), (4') und (6') zu verstehen sind, d. h.

$$w^2 = \sum_1^n {}_j w_j^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

$$\psi = \sum_1^n {}_j w_j \dot{x}_j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22),$$

$$v^2 = \sum_1^n {}_j \dot{x}_j^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Lassen wir zunächst z mit einer der $\dot{x}$ übereinstimmen. Aus (20), unter Berücksichtigung von (21), (22), (23), in dem man außerdem beachtet, daß die w_j nur von den x und t abhängen, bekommt man

$$(V^2 - w^2 + \psi)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i - w_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Bei der Problemstellung (§ 2) hatten wir die Richtungskosinusse α_i der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges (vom absoluten Betrage V) eingeführt, und das Prinzip der relativen Bewegung durch die Formel

$$\dot{x}_i - w_i = V \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (25)$$

ausgedrückt.

Wir dürfen daher im rechten Gliede von (24), statt $\dot{x}_i - w_i$, die Komponenten $V\alpha_i$ der relativen Geschwindigkeit einführen, und somit einfacher

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \varrho\, \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (24'),$$

schreiben, wo zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{V}{V^2 - w^2 + \psi} \qquad (26)$$

gesetzt ist.

Nun, aus (22), indem man, nach (25), für $\dot{x}_j$ die Summe $V\alpha_j + w_j$ einführt, bekommt man, wegen (21),

$$\psi = w^2 + V\,W \qquad (27),$$

wo

$$W = \sum_1^n {}_j\, w_j \alpha_j \qquad (28)$$

die Komponente der Windgeschwindigkeit in der Steuerrichtung bezeichnet.

Der vorangehende Wert von ϱ wird folglich

$$\varrho = \frac{1}{V + W} \qquad (26').$$

Als Vorbereitungsformeln brauchen wir noch die Ausdrücke der $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial L}{\partial t}$, woraus die $\dot{x}$, mittels (25), fortzuschaffen sind.

Setzen wir in (20) $z = x_i$, so bekommen wir, wegen (22) und (23),

$$(V^2 - w^2 + \psi)\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\dot{x}_j .$$

Links ist (26), rechts (25) zu verwenden, wodurch, wegen (22) und (28), die Gleichung sich auf die Form

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (29)$$

reduzieren läßt.

In identischer Weise ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\varrho \frac{\partial W}{\partial t} \qquad (30).$$

Durch Einsetzen von (24'), (29) und (30) in den Bewegungsgleichungen (I) erhält man

$$\frac{d(\varrho\, \alpha_i)}{d\,t} = -\varrho \frac{\partial W}{\partial x_i} - \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial t}\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (31),$$

welche, zusammen mit den kinematischen Gl. (25), eine notwendige Folge unserer Minimumsaufgabe sind.

Sie sind, als normales Differentialsystem im Bezug auf die $2n$-Größen x_i, α_i (unbekannte Funktionen von t), indem ϱ den Wert (26') beigelegt wird, tatsächlich fähig, die x_i, α_i eindeutig, aus gegebene Anfangswerten, zu bestimmen. Da die α_i Richtungskosinusse bezeichnen, so muß, als Beleg der Rechnung, die Kompatibilität der quadratischen Bedingung

$$\sum_1^n {}_i\, \alpha_i^2 = 1$$

sich rechtfertigen lassen, d. h. es muß

$$\sum_1^n {}_i\, \alpha_i \dot{\alpha}_i ,$$

wegen (31), (26') und $\sum_1^n {}_i\, \alpha_i^2 = 1$, identisch verschwinden.

Um dies anzusehen, genügt es, wesentlich ϱ durch seinen Wert (26′), in den Gl. (31), zu ersetzen. Dabei isoliere man zunächst in den erwähnten Gleichungen die $\dot{a}_i$, und schreibe demnach

$$a_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - \left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \varrho \frac{\partial W}{\partial t}\right) a_i \quad \ldots \ldots \quad (31').$$

Um $\dot{\varrho}$ aus (26′) zu berechnen, empfiehlt es sich, die (26′) selbst unter der Form

$$\varrho\,(V + W) = 1 \quad \ldots \ldots \quad (26'')$$

zu schreiben und daraus

$$V \dot{\varrho} = -\frac{d\,(\varrho\, W)}{d\,t} \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

zu entnehmen. Wegen (28) ist

$$\varrho\, W = \sum_1^n{}_j\, w_j \cdot \varrho\, a_j\,,$$

woraus

$$\frac{d\,(\varrho\, W)}{d\,t} = \sum_1^n{}_j\, w_j \frac{d\,(\varrho\, a_j)}{d\,t} + \varrho \sum_1^n{}_j \frac{d\, w_j}{d\,t}\, a_j\,.$$

Für $\frac{d\,(\varrho\, a_j)}{d\,t}$ sind einfach die Ausdrücke (31) einzuführen. Überdies hat man

$$\frac{d\, w_j}{d\,t} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, \dot{x}_k\,,$$

also, wegen (25),

$$\frac{d\, w_j}{d\,t} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, w_k + V \sum_1^n{}_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, a_k\,,$$

und somit, durch materielle Einsetzung,

$$\frac{d\,(\varrho\, W)}{d\,t} = -\varrho \sum_1^n{}_j\, w_j \frac{\partial W}{\partial x_j} - \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial t} \sum_1^n{}_j\, w_j\, a_j + \varrho \sum_1^n{}_j \frac{\partial w_j}{\partial t}\, a_j$$

$$+ \varrho \sum_1^n{}_{jk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, w_k\, a_j + \varrho\, V \sum_1^n{}_{jk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, a_k\, a_j\,.$$

Das vierte Glied rechts, wegen (28), läßt sich schreiben

$$\varrho \sum_1^n{}_k \frac{\partial W}{\partial x_k}\, w_k\,,$$

so daß es durch das erste vernichtet wird. Das zweite Glied, immer wegen (28), ist nichts anderes als $-\varrho^2 \frac{\partial W}{\partial t}\, W$, das dritte beträgt $\varrho \frac{\partial W}{\partial t}$, so daß, beide zusammen,

$$\varrho\,(1 - \varrho\, W) \frac{\partial W}{\partial t}$$

ergeben, also, wegen (26″),

$$\varrho^2\, V \frac{\partial W}{\partial t}\,.$$

Es bleibt somit

$$\frac{d\,(\varrho\, W)}{d\,t} = \varrho^2\, V \frac{\partial W}{\partial t} + \varrho\, V A\,,$$

indem man zur Abkürzung die in bezug auf die a_i quadratische Form

$$A = \sum_1^n{}_{jk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, a_j\, a_k \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

einführt.

Mit dem soeben erhaltenen Ausdrucke von $\frac{d(\varrho W)}{dt}$ läßt die Formel (32) sich schreiben

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\varrho \frac{\partial W}{\partial t} - A ,$$

und die Gl. (31') nehmen entsprechend ihre endgültige Form an

$$\dot{a}_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} + A a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31'').$$

Wegen (28) ist die Definition (33) von A auch mit

$$A = \sum_1^n {}_k \frac{\partial W}{\partial x_k} a_k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (33')$$

gleichgültig. Es folgt daher tatsächlich aus dem System (31'')

$$\sum_1^n {}_i a_i \dot{a}_i = 0 , \quad \text{w. z. b. w.}$$

Zusammenfassend haben wir als zweckmäßigste Differentialumkleidung der Navigationsaufgabe (im n dimensionalen Euklidischen Raume) zwei Systeme von n Gleichungen erster Ordnung in den $2n$ Unbekannten x_i, Koordinaten, a_i, Steuerrichtungskosinusse, des Fahrzeuges. Die erste Gruppe besteht einfach aus den n kinematischen Gl. (25), d. h.

$$\dot{x}_i = w_i + V a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (III),$$

welche in bezug auf die a linear sind.

Die zweite Gruppe ist von den eigentlichen Navigationsgleichungen (31''), d. h.

$$\dot{a}_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} + A a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (IV)$$

gebildet, wo, gemäß (28) und (33),

$$W = \sum_1^n {}_j w_j a_j , \quad A = \sum_1^n {}_{jk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} a_j a_k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (V).$$

Dabei bezeichnen die $w_i(x|t)$ die (als Funktionen des Ortes und der Zeit) gegebenen Komponenten der Windgeschwindigkeit. Wie man sieht, wird das zweite System (IV), im allgemeinen, vom dritten Grade in bezug auf die a.

6. Übereinstimmung mit Zermelo's Lösung — Gleichförmige (mit der Zeit veränderliche) Windverteilung.

Die in voriger Ziffer, für irgendwelches n, hergeleiteten Gleichungen zeichnen sich durch Allgemeinheit und Symmetrie aus. Für $n = 2$ und $n = 3$ stimmen sie natürlich, bis auf die Bezeichungen, mit denjenigen, die Zermelo durch seine direkte Methode festgestellt hatte[5]).

Im Spezialfalle, wo die Windgeschwindigkeitskomponenten w_i nur von t, nicht aber vom Orte abhängen (örtlich konstanter Wind), sind augenscheinlich sowohl die $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ als A gleich Null. Man hat alsdann aus (IV) $\dot{a}_i = 0$, und folglich

$$a_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Steuerrichtung muß daher konstant bleiben in bezug auf einen festen Beobachter, und die Gl. (III), deren zweite Glieder in diesem Falle nur von der Zeit abhängen, lassen sich unmittelbar durch Quadraturen integrieren.

[5]) Vgl. S. 116 und 122 dieses Bandes.

Ein Näherungsverfahren zur Lösung gewisser partieller, linearer Differentialgleichungen.

Von *Stefan Bergmann* in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin).

Bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere vom Wellengleichungstypus, bedient man sich meistens des Ritzschen Verfahrens. Bei der Durchführung dieses Verfahrens stößt man jedoch auf eine Schwierigkeit: In der Praxis ist es nämlich nur möglich, Approximationsausdrücke zu berechnen, die aus einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Funktionen (sogenannten Koordinatenfunktionen) zusammengesetzt sind. Die aus diesen Funktionen zusammengesetzte Approximationsfunktion[1]) hat den zufälligen Charakter, den die willkürlich gewählten Koordinatenfunktionen besitzen. Denn beim Ritzschen Verfahren wird an die Koordinatenfunktionen praktisch keine andere Bedingung[2]) gestellt als die, den Randbedingungen des Problems zu genügen. Andererseits ist die Eigenschaft, *genau* die Randwerte zu befriedigen, gar nicht so wesentlich, denn in der Praxis sind doch die Randbedingungen auch nicht genau erfüllt. Es liegt deswegen nahe, eine Methode zu suchen, bei der im Gegensatz zu Ritz die A.-F. die Differentialgleichung genau befriedigt, bei der dafür die Randbedingungen nur näherungsweise erfüllt zu sein brauchen.

Die Frage der Approximation einer Lösung einer Differentialgleichung durch die Partikularlösungen dieser Gleichung ist zunächst für die Gleichung $\Delta u = 0$ (und mit ihr verwandte) studiert worden. Ein einfaches Verfahren, in diesem Falle die A.-F. zu konstruieren, findet sich in meiner 1922 erschienenen Dissertation[3]). In dem 1926 in Zürich gehaltenen Vortrage[4]) gelangte Herr Trefftz auf einem eleganten und vollständig verschiedenen Wege zu demselben Verfahren, wobei er den Zusammenhang dieser Methode mit dem Ritzschen Verfahren aufgezeigt hat. Sodann wurde in zwei weiteren Untersuchungen diese Methode auf das elastische Problem ausgedehnt[5]) und auf ein räumliches Potentialproblem angewandt[6]). In einer Reihe von interessanten Arbeiten[7]) untersuchte Herr Walsh in letzter Zeit mit viel Erfolg von theoretischer Seite her verschiedene Fragen, die diesem Problemenkreis entspringen.

Während also, wie wir gesehen haben, der Typus $\Delta u = 0$ ausgiebig in der angegebenen Richtung behandelt worden ist, fehlen meines Wissens bei den Gleichungen vom Typus $\Delta u + \tau u = 0$ analoge Untersuchungen, und damit soll sich diese Arbeit beschäftigen.

Um dabei gewissen mathematischen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, kann man an Stelle der Aufgabe der durch die Randwerte gegebenen Funktion durch die Partikularlösungen zunächst eine andere einfachere formulieren:

Es sei eine endliche Menge von linear unabhängigen Partikularlösungen[8]) $w^{(s)}$ $(s=1,2,3,\ldots n)$ der betreffenden Differentialgleichung gegeben. (Diese müssen natürlich nicht den Randbedingungen genügen.) Es wird nach einer Linearverbindung diese P.-L.

$$W_n = \sum_{s=1}^{s=n} a_s w^{(s)}$$

gefragt, die (in gewissem, im folgenden näher auseinandergesetztem Sinne) am Rande möglichst wenig von den vorgegebenen Randwerten $\overline{w}$[9]) abweicht. Bei dieser Formulierung fällt

---

[1]) A.-F. = Approximationsfunktion.

[2]) Die anderen Forderungen (wie die Vollständigkeit des Systemes usw.) beziehen sich auf die Gesamtheit der Koordinatenfunktionen, für eine endliche Folge von ihnen entstehen dadurch keine Beschränkungen.

[3]) „Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen", Math. Annalen **86** (1922) S. 237 bis 271.

[4]) Trefftz, „Das Gegenstück zu dem Ritzschen Verfahren", Verhandlungen des II. internationalen Kongresses in Zürich (1926) S. 131. — Siehe auch Trefftz, „Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren", Math. Annalen **100** (1928) S. 503. Mit verwandten Problemen beschäftigt sich die Arbeit von K. Friedrichs, „Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen," Nachrichten d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen. Mathem.-Phys. Klasse (1929) S. 13 bis 20.

[5]) „Über die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper", Math. Annalen **98** (1927) S. 248 bis 263. Vgl. auch Malkin, „Über einige neuere Arbeiten auf dem Gebiete de Elastizitätslehre", diese Zeitschr. X (1930) S. 182 bis 197, § 1.

[6]) „Über die Berechnung der Temperaturverteilung im Rotor einer Dynamomaschine", diese Zeitschr. VIII (1928) S. 402 bis 413. In dieser Arbeit wird an Hand eines Beispieles gezeigt, wie man in einem Rotationszylinder die räumlichen Potentialfunktionen durch Linearverbindungen von Kugelfunktionen approximieren kann.

[7]) J. L. Walsh, „The approximation of harmonic funktions by harmonic polynomials and by harmonic rational funktions", Bulletin of the American mathematical Society, XXXV (1929) S. 499 bis 545, wo sich auch weitere Angaben über andere Untersuchungen von Herrn Walsh finden.

[8]) Im folgenden mit P.-L. bezeichnet.

[9]) Ein dicker Strich über einer Funktion bedeutet in üblicher Weise, daß die Werte der betreffenden Funktion am Rande gemeint sind.

vorläufig die Frage weg, ob der Grenzwert der A.-F.-en existiert und am Rande die vorgeschriebenen Werte (genau) annimmt[10]). Auf diese rein mathematischen Fragen werden wir in der vorliegenden Arbeit nicht eingehen. Vielmehr wollen wir die Durchführung der angegebenen Methode schildern und zeigen, daß sie in vielen Fällen mit verhältnismäßig kleinem Arbeitsaufwand zu praktisch brauchbaren A.-F. führt.

Wir nutzen dabei noch einen Umstand aus: Die Durchführung ähnlicher Näherungsverfahren ist meistens deshalb so zeitraubend, weil man die gesuchten Koeffizienten a_s der P.-L. als Unbekannte eines Systems von linearen Gleichungen (unter Umständen mit vielen Unbekannten) bestimmen muß. Bei der im folgenden geschilderten Methode kann man diesen unangenehmen Umstand dadurch beseitigen, daß man solche P.-L. benutzt, die selbst längs eines Teiles der Berandung die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen. (In den meisten Fällen läßt sich dies leicht erreichen.) Benutzt man nun diese P.-L. als $w^{(s)}$, so wird schon eine Linearkombination von wenigen genügen, damit der erhaltene Ausdruck sich auf dem Komplementärteil des Randes den vorgegebenen Werten verhältnismäßig gut anpaßt[11]).

Es sei das Differentialgleichungssystem

$$2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}-2\tau\frac{\partial w_2}{\partial y}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+2\tau\frac{\partial w_1}{\partial y}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

gegeben, und es wird ein τ-Wert und ein zugehöriges Paar von Funktionen $W_1(x,y)$ und $W_2(x,y)\,[W_1\not\equiv 0,\ W_2\not\equiv 0]$ gesucht, die im Inneren eines Rechteckes $\mathfrak{B}$

$$-1\leq y\leq 1, \qquad -l\leq x\leq l\,^{12)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

das Gleichungssystem (1, 1a) befriedigen und am Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ verschwinden, d. h. für die

$$\overline{W}_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\overline{W}_2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

gilt. Wir werden uns dabei nur für solche τ-Werte interessieren, die zwischen 1 und 2,3 liegen. Aus anderen Überlegungen kann man nämlich schließen, daß in diesem Intervalle der kleinste Eigenwert von (1, 1a) liegt.

Abb. 1.

Abb. 2.

[10]) Es sei bemerkt, daß das Problem der Herstellung eines vollständigen Funktionensystems von P.-L. bei der Gleichung $\Delta u+\tau u=0$ sich in der Weise behandeln läßt, daß man die Lösungsfunktionen $u\,(x,y)$ ins Komplexe fortsetzt. Man kann dann zeigen, daß zu jedem ebenen Bereich $\mathfrak{B}$ ein vierdimensionaler Bereich $\mathfrak{H}$ existiert, von der Beschaffenheit, daß jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungsfunktion $u\,(x,y)$ auch in $\mathfrak{H}$ regulär ist. Auf Grund dieses Satzes, unter Anwendung der in Math. Annalen **100** (1928) S. 401 und in der Math. Zeitschrift **29** (1929) S. 653 durchgeführten Betrachtungen folgt, daß zu jeder endlichen Folge von P.-L. $u^{(s)}\,(x,y)$ $[s=1,2,3,\ldots\ldots n]$ sich eine weitere abzählbar unendliche Folge von P.-L. $u^{(s)}\,(x,y)$ $[s=n+1,\,n+2,\ldots\ldots]$ finden läßt derart, daß jede Lösungsfunktion $u\,(x,y)$ sich nach dem System der $u^{(s)}\,(x,y)$ $[s=1,2,3,\ldots\ldots n,\ n+1,\ n+2,\ldots\ldots]$ in $\mathfrak{H}$ (somit auch in $\mathfrak{B}$) entwickeln läßt. Ich werde an einer anderen Stelle auf diese Fragen eingehen.

Im übrigen ist es leicht einzusehen, daß für gewisse Klassen von Funktionen u das System der Real- und Imaginärteile von $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\cos\left(t\sqrt{\frac{x^2+z^2}{\tau}}\right)}{\sqrt{1-t^2}}\left[\left(\frac{x\pm iz}{\sqrt{\tau}}\right)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right]^n dt$ $(n=0,1,2,3,4,\ldots\ldots)$ vollständig ist. Vgl. dazu die Arbeit: „Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die die Differentialgleichung $\Delta V+V=0$ befriedigen“, Math. Zeitschrift **32** (1930) S. 386 bis 406.

[11]) Vgl. ebenfalls „Über Schubknickung von isotropen und anisotropen Platten“, Verhandlungen des 3. internationalen Kongresses für technische Mechanik in Stockholm, Bd. III 1930, S. 82 bis 88. Zu der hier geschilderten Methode wurde ich durch die gemeinsam mit Herrn Prof. Reißner durchgeführten Untersuchungen über Platten angeregt (s. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt **20** (1929) S. 475 bis 481, **21** (1930) S. 306 bis 310 und die demnächst erscheinende Fortsetzung dieser Arbeiten).

[12]) Wir lassen im Laufe der Rechnung zunächst den Wert l allgemein, wir werden dann bei unserem Beispiel für l den Wert $l=2{,}42$ wählen.

Das System (1, 1a) läßt sich zu einer Gleichung zusammenfassen, indem man

$$w = w_1 + i\,w_2 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

setzt. (1, 1a) geht in

$$2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,i\,\tau\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{b}),$$

3, 3a) in

$$\overline{w} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{b})$$

über.

Wir stellen, im Sinne unserer Vereinfachung, zunächst ein System von P.-L. $w^{(s)}$ $(s = 1,2)$ auf, die längs eines *Teiles* der Berandung $\mathfrak{R}$, nämlich längs AB und CD (vgl. Abb. 1) verschwinden. Es ist nämlich bekanntlich leicht möglich, in einem unendlich langen Streifen Lösungen der Differentialgleichung (1b) anzugeben, die längs der beiden Randgeraden verschwinden. Es ist in unserem Falle bequem, sie als periodisch zu nehmen (was aber in keiner Weise durch unsere Aufgabe vorgeschrieben ist[13]).

Der Ausdruck

$$P_1\,e^{i(\varkappa x + \lambda^{\rm I} y)} + P_2\,e^{i(\varkappa x + \lambda^{\rm II} y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

wo $\varkappa$ — eine reelle —, P_1 und P_2 beliebige Konstanten sind und

$$\lambda^{\rm I} = -(\varkappa + \tau) + \sqrt{-\varkappa^2 + 2\,\varkappa\,\tau + \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\lambda^{\rm II} = -(\varkappa + \tau) - \sqrt{-\varkappa^2 + 2\varkappa\tau + \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5\text{a})$$

bedeutet, ist eine P.-L. von (1b), (wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann). Der Ausdruck (4) kann offenbar nur dann für $y = +1$ und $y = -1$ gleichzeitig verschwinden, wenn

$$\left.\begin{aligned} P_1 \cos \lambda^{\rm I} + P_2 \cos \lambda^{\rm II} = 0 \\ P_1 \sin \lambda^{\rm I} + P_2 \sin \lambda^{\rm II} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

gilt, was nur dann möglich ist, falls

$$\sin(\lambda^{\rm I} - \lambda^{\rm II}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

d. h. falls

$$\lambda^{\rm I} - \lambda^{\rm II} \equiv 2\sqrt{\tau^2 + 2\,\varkappa\,\tau - \varkappa^2} = N\pi \qquad (N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (7\text{a})$$

oder

$$\varkappa = \tau \pm \sqrt{2\,\tau^2 - \frac{N^2\pi^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\text{b})$$

wird. [Der Wert $N = 0$ kommt nicht in Frage, denn dann wäre $\lambda^{\rm I} = \lambda^{\rm II}$, an Stelle des Ausdruckes (4) tritt

$$e^{i(\varkappa x + \lambda^{\rm I} y)}\,(P_1 + P_2\,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\text{a})$$

auf, und (4a) kann nur dann für $y = \pm 1$ verschwinden, wenn er identisch gleich 0 ist.]

Will man außerdem, daß (4) in x periodisch ist, so muß $\varkappa$ reell sein. Aus (7b) folgt dann: Für ein festes τ, das im Intervalle

$$\frac{\pi N}{2\sqrt{2}} < \tau \leq \frac{\pi(N+1)}{2\sqrt{2}}$$

liegt, gibt es $2N$ verschiedene Lösungen der Form (4), die in x periodisch sind und für $y = \pm 1$ identisch verschwinden. Da unsere τ im Intervalle von 1 bis 2,5 liegen, so können wir für N nur den Wert $N = 1$ nehmen. (Für $N = -1$ vertauschen $\lambda^{\rm I}$ und $\lambda^{\rm II}$ ihre Werte.)

[13]) Bei unserer vereinfachten Fragestellung ist die Wahl der P.-L. $w^{(s)}$ vollständig willkürlich; eine ganz andere Frage (die hier, wie gesagt, nicht behandelt wird) ist die, wie man die $w^{(s)}$ wählen soll, damit die Folge der A.-F. gegen die (genaue) Lösung der Differentialgleichung konvergiert.

Es ist somit

$$1{,}11 < \tau \leq 2{,}22 \quad \text{(8)}.$$

Setzt man

$$\varkappa_1 = \tau + \frac{\pi}{2} \quad \text{(7c)},$$

$$\varkappa_2 = \tau - \frac{\pi}{2} \quad \text{(7d)},$$

und bezeichnet man mit λ_k^{I} und λ_k^{II}, die gemäß (5) und (5a) aus $\varkappa_k$ $(k = 1{,}2)$ gewonnenen Werte, so erhalten wir in

$$w^{(1)} = e^{i(\varkappa_1 x + \lambda_1^{\mathrm{I}} y)} + e^{i(\varkappa_1 x + \lambda_1^{\mathrm{II}} y)} \quad \text{(9)},$$

$$w^{(2)} = e^{i(\varkappa_2 x + \lambda_2^{\mathrm{I}} y)} + e^{i(\varkappa_2 x + \lambda_2^{\mathrm{II}} y)} \quad \text{(9a)}$$

unsere zwei P.-L. der gewünschten Art.

Wir gehen nun dazu über, in der gesuchten A.-F.

$$W_2 = a_1 w^{(1)} + a_2 w^{(2)} \quad \text{(10)}$$

die Koeffizienten a_1, a_2 zu bestimmen. Als „Maß" für die Güte der Annäherung einer Funktion w am Rande wählen wir den Wert des Integrals

$$\int_{\mathfrak{R}} |\overline{w}|^2 \, d\mathfrak{s} = \int_{-1}^{+1} [|w|^2_{x=-\xi} + |w|^2_{x=\xi}]^2 \, dy^{14)} \quad \text{(11)},$$

wo $d\mathfrak{s}$ Limenelement des Randes $\mathfrak{R}$ bedeutet, wobei nur derart normierte Funktionen betrachtet werden, für die das Mittel von $|w|^2$ (bezogen auf die ganze Platte) gleich $\frac{1}{4\tau}$ ist, d. h. für die

$$\frac{4\tau}{4\xi} \int_{-1}^{1} \int_{-\xi}^{\xi} |w|^2 \, dx \, dy = 1 \quad \text{(12)}$$

gilt. Ist nun ein festes τ und ξ gegeben, so müssen wir a_1 und a_2 so bestimmen, daß das „Maß" (11) am kleinsten wird; den Wert von (11) bezeichnen wir dann mit $m(\xi, \tau)$. Die Bestimmung von $m(\xi, \tau)$ geschieht wie üblich, indem man das Minimum der „Hermiteschen Form"[15])

$$F(a_1, a_2) = a_1 \overline{a}_1 F_{11} + a_1 \overline{a}_2 F_{12} + a_2 \overline{a}_1 F_{21} + a_2 \overline{a}_2 F_{22} \quad \text{(11a)}$$

bei der Nebenbedingung

$$G(a_1, a_2) = a_1 \overline{a}_1 G_{11} + a_1 \overline{a}_2 G_{12} + a_2 \overline{a}_1 G_{21} + a_2 \overline{a}_2 G_{22} = \frac{\xi}{\tau} \quad \text{(12a)}$$

sucht. Es bedeutet dabei:

$$F_{\lambda\mu} = \int_{-1}^{+1} [(w^{(\lambda)} \overline{w}^{(\mu)})_{x=-\xi} + (w^{(\lambda)} \overline{w}^{(\mu)})_{x=\xi}] \, dy \quad (\lambda, \mu = 1{,}2) \quad \text{(13)}$$

$$G_{\lambda\mu} = \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-1}^{+1} w^{(\lambda)} \overline{w^{(\mu)}} \, dx \, dy \quad \text{(13a)}.$$

In unserem Falle erhalten wir:

$$F_{11} = F_{22} = 8 \quad \text{(13b)},$$

$$F_{12} = F_{21} = C(\tau) \cos X \quad \text{(13c)},$$

$$G_{11} = G_{22} = 8\,\xi \quad \text{(13d)},$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{C(\tau) \sin X}{2\,r} \quad \text{(13e)},$$

[14]) Wir nehmen für den Augenblick an, daß die Platte die Länge $2l = 2\xi$ hat.

[15]) So nennt man quadratische Formen in komplexen Veränderlichen. Ein (dünner) Strich über eine Größe bedeutet den Übergang zu der konjugiert Komplexen.

wo

$$r = \sqrt{2\tau^2 - \frac{\pi^2}{4}}, \quad C(\tau) = 4 \sin 2r \left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{\pi - 2r} - \frac{1}{\pi + 2r}\right\}, \quad X = 2r\xi \quad \ldots\ldots \quad (13f)$$

ist. Um das Extremum der Form (11a) bei der Nebenbedingung (12a) zu errechnen, setzt man

$$\frac{\partial(F + \sigma G)}{\partial a_1} \equiv (F_{11} + \sigma G_{11})\bar{a}_1 + (F_{12} + \sigma G_{12})\bar{a}_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (14),$$

$$\frac{\partial(F + \sigma G)}{\partial a_2} \equiv (F_{12} + \sigma G_{12})\bar{a}_1 + (F_{22} + \sigma G_{22})\bar{a}_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (14a)$$

(σ eine noch unbestimmte Konstante). Multipliziert man (14) mit a_1, (14a) mit a_2 und addiert, so erhält man die Beziehung

$$\sigma\frac{\xi}{\tau} + m(\xi, \tau) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (15).$$

Der Wert von σ läßt sich dabei aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} F_{11} + \sigma G_{11} & F_{12} + \sigma G_{12} \\ F_{12} + \sigma G_{12} & F_{22} + \sigma G_{22} \end{vmatrix} \equiv (G_{11}{}^2 - G_{12}{}^2)\sigma^2 + 2\sigma(F_{11}G_{11} - F_{12}G_{12}) + (F_{11}{}^2 - F_{12}{}^2) = 0 \quad (16)$$

bestimmen. Aus (15) und (16) erhält man schließlich für das Extremum

$$m_1(\xi, \tau) = \frac{\xi}{\tau}\frac{F_{11} + F_{12}}{G_{11} + G_{12}} = \frac{X}{\tau}\frac{[8 + C(\tau)\cos X]}{[8X + C(\tau)\sin X]} \quad \ldots\ldots \quad (17),$$

$$m_2(\xi, \tau) = \frac{\xi}{\tau}\frac{F_{11} - F_{12}}{G_{11} - G_{21}} = \frac{\xi}{\tau}\frac{[8 - C(\tau)\cos X]}{[8X - C(\tau)\sin X]} \quad \ldots\ldots \quad (17a).$$

Aus (14) folgt weiter

$$\bar{a}_1 = -\bar{a}_2\frac{F_{12} + \sigma G_{12}}{F_{11} + \sigma G_{11}} = -\bar{a}_2\frac{C(\tau)\left[\cos X + \sigma\frac{\sin X}{2r}\right]}{8[1 + \sigma\xi]}$$

und daraus und aus (12a)

$$|a_2|^2\left[G_{11}\left|\frac{F_{12} + \sigma G_{12}}{F_{11} + \sigma G_{11}}\right|^2 + G_{12}\left(\frac{F_{12} + \sigma G_{12}}{F_{11} + \sigma G_{11}}\right) + G_{21}\left(\frac{F_{12} + \sigma G_{12}}{F_{11} + \sigma G_{11}}\right) + G_{22}\right] = \frac{\xi}{\tau}.$$

Unsere vereinfachte Aufgabe läßt somit eine ∞^1-Schar von Lösungen zu, denn aus den beiden Gleichungen lassen sich nur Werte für $|a_1|$ und $|a_2|$ bestimmen und wir erhalten

$$a_1 = |a_1|e^{i\varphi}, \qquad a_2 = |a_2|e^{i\varphi},$$

wobei φ eine willkürliche reelle Zahl ist ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). (Bei unserem Beispiel — s. S. 330 — wurde für φ der Wert 0 gewählt.)

Abb. 3.

Abb. 3a.

Wählt man ein festes τ, so ist für dieses

$$m(\xi, \tau) = \min[m_1(\xi, \tau), m_2(\xi, \tau)]$$ [16]

eine Funktion von ξ allein. (In den Abb. 3 und Abb. 3a wurden $m(\xi, 1, 2)$ und $m(\xi, 1, 3)$ als Funktionen von ξ aufgetragen.) Für einen bestimmten Wert (bzw. für eine diskrete Folge

[16]) min $[a, b]$ = der kleinere der beiden Werte a und b.

von Werten) von ξ (nennen wir sie Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, ...) ist das $m(\xi, \tau)$ am kleinsten. Den kleinsten dieser Ξ_K-Werte bezeichnen wir mit $\Xi(\tau)$ und den zugehörigen Wert $m[\Xi(\tau), \tau]$ mit $M(\tau)$. (Es ist z. B. $\Xi(1, 2) = 2{,}42$, $M(1, 2) = 0{,}0855$, $\Xi(1, 3) = 1{,}65$, $M(1, 3) = 0{,}1622$.) Um nun jetzt $\Xi(\tau)$ als Funktion von τ zu bestimmen, differenzieren wir (17) nach ξ und erhalten zur Bestimmung von $\Xi(\tau)$

$$C(\tau) = \frac{8\,X^2 \sin X - 8 \sin X + 8\,X \cos X}{\frac{1}{2} \sin 2\,X - X} \quad \text{[17]} \qquad (18),$$

Abb. 4.

Abb. 5.

Abb. 6.

wo nach (13f)

$$X = 2\,r\,\Xi \qquad (18a),$$

$$r = \sqrt{2\,\tau^2 - \frac{\pi^2}{4}} \qquad (18b)$$

ist. Am einfachsten ist es, (18) auf graphischem Wege zu lösen. In Zahlentafel 1 sind die Werte von $C(\tau)$ für diskrete τ angegeben; in Zahlentafel 2 die Werte von

$$\frac{8\,X^2 \sin X - 8 \sin X + 8\,X \cos X}{\frac{1}{2} \sin 2\,X - X}$$

[17]) Am zweckmäßigsten ist es, aus (18) zunächst das zu einem τ zugehörige X zu bestimmen, woraus man mit Hilfe von (18a) und (18b) das zugehörige Ξ bestimmt.

für diskrete X[18]). In der Abb. 4 sind die entsprechenden Kurven aufgezeichnet. In Zahlentafel 3 und Abb. 5 wurde $M(\tau)$ angegeben. Schließlich ist in Zahlentafel 3 und Abb. 6 τ und $\mu(\Xi) = M[\tau(\Xi)]$ als Funktion von Ξ angegeben.

Zahlentafel 1.

τ	$C(\tau)$	τ	$C(\tau)$
1,12	7,917	1,6	3,783
1,2	7,179	1,7	3,065
1,3	6,272	1,8	2,426
1,4	5,396	1,9	1,862
1,5	4,558	2,0	1,368

Zahlentafel 2.

X	$16\,\frac{(X^2-1)\sin X + X\cos X}{\sin 2X - 2X}$	X	$16\,\frac{(X^2-1)\sin X + X\cos X}{\sin 2X - 2X}$
2,80	0,899	3,00	4,70
2,85	1,768	3,05	5,82
2,90	2,68	3,10	6,98
2,95	3,66	3,1416	8,00

Zahlentafel 3.

τ	$X = 2\Xi\sqrt{2\tau^2 - \frac{\pi^2}{4}}$	$M(\tau) = \mu(\Xi)$	Ξ
1,12	3,139	0,00925	7,70
1,2	3,108	0,0855	2,42
1,3	3,07	0,1622	1,60
1,4	3,032	0,228	1,256
1,5	2,994	0,325	1,05

Zahlentafel 4.

Werte von $\boldsymbol{W}_2(x, y)$

	$y \backslash x$	−2,42	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,42
Realteil	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	0,001	0,021	−0,025	−0,096	−0,115	−0,0605	0,080	0,182	0,198	0,128	0,048
	0,5	0,071	0,013	−0,1155	−0,174	−0,0755	0,142	0,341	0,392	0,273	0,086	−0,018
	0,25	0,072	−0,067	−0,172	−0,086	0,173	0,439	0,533	0,395	0,136	−0,052	−0,063
	0	−0,009	−0,122	−0,076	0,1695	0,456	0,584	0,456	0,1695	−0,076	−0,122	−0,009
	−0,25	−0,063	−0,052	0,136	0,395	0,533	0,439	0,173	−0,086	−0,172	−0,067	0,072
	−0,5	−0,018	0,086	0,273	0,392	0,341	0,142	−0,0755	−0,174	−0,1155	0,013	0,071
	−0,75	0,048	0,128	0,198	0,182	0,080	−0,0605	−0,115	−0,096	−0,025	0,021	0,001
	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Imaginärteil	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	−0,100	−0,038	0,012	−0,014	0,105	−0,156	−0,204	−0,125	0	0,088	0,096
	0,5	−0,101	−0,007	−0,017	−0,159	−0,322	−0,366	−0,233	0	0,187	0,220	0,136
	0,25	0,015	−0,010	−0,157	−0,365	−0,446	−0,301	0	0,270	0,349	0,227	0,070
	0	−0,002	−0,111	−0,325	−0,436	0,313	0	0,313	0,436	0,325	0,111	0,020
	−0,25	−0,070	−0,227	−0,349	−0,270	0	0,301	0,446	0,365	0,157	0,010	0,015
	−0,5	−0,136	−0,220	−0,187	0	0,233	0,366	0,322	0,159	0,017	0,007	0,101
	−0,75	−0,096	−0,088	0	0,125	0,206	0,156	0,105	0,014	−0,012	0,038	0,100
	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[18]) Herrn stud. math. G. Rommel bin ich für die Hilfe bei der Durchführung von numerischen Rechnungen zum Dank verpflichtet.

Ist uns also eine Platte von der Breite 2 und von der Länge $2l = 2\Xi$ gegeben, so können wir aus Abb. 6 das zugehörige $\tau(\Xi)$ und $\mu(\Xi)$ bestimmen (z. B. für $\Xi = 2{,}42$, ist $\tau(2{,}42) = 1{,}2$, $\mu(2{,}42) = 0{,}0855$).

Wie wir aus der Abb. 6 ersehen, sind die erhaltenen $\mu(\Xi)$ für die Ξ-Werte zwischen 1,3 und ∞ ziemlich klein. Da sie gemäß unserem Verfahren den Wert von $\dfrac{\int\limits_{\mathfrak{R}} |\overline{W}_s|^2 |d\mathfrak{s}|}{\dfrac{\tau}{\Xi}\iint\limits_{\mathfrak{B}} |W_s|^2\, dx\, dy}$ geben, ist zu erwarten, daß die zugehörige A.-F. am Rande nur wenig von den vorgeschriebenen Randwerten $\overline{w} = 0$ abweicht.

Abb. 7.

Abb. 7a.

Für $\Xi = 2{,}42$ wurde auf Grund der Abb. 6, $\tau = 1{,}2$, $\mu(2{,}42) = 0{,}0855$ bestimmt. Die zugehörigen $w^{(s)}$, die mit Hilfe von (4) berechnet wurden, lauten:

$$w^{(1)} = e^{i(0{,}5577\,x - 0{,}1869\,y)} + e^{i(0{,}5577\,x - 3{,}3285\,y)},\quad w^{(2)} = e^{i(1{,}8423\,x - 1{,}4715\,y)} + e^{i(1{,}8723\,x - 4{,}6131\,y)} \quad . \quad . \; (19\text{b});$$

a_s (in unserem Falle ist $a_1 = a_2 = 0{,}146$) bestimmen wir mit Hilfe von (13) und (14) und erhalten schließlich für die A.-F. den Ausdruck

$$W_2(x, y) = W_1'(x, y) + i\, W_2''(x, y) = 0{,}146\,[w^{(1)} + w^{(2)}].$$

In der Zahlentafel 4 wurde der Wertevorrat von $W_2(x, y)$ für diskrete x, y angegeben, in den Abb. 7 und 7a sind die Niveaulinien des reellen und imaginären Teiles der so erhaltenen A.-F. aufgetragen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Bestimmung des mittleren Trägheitsmomentes von Gittermasten mittels eines Pendelpaares. Auf Anregung von Professor Le Rolland von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften an der französischen Universität Rennes und unter seiner Leitung führte der Schiffbaustudierende F. Tessier im vierten Studienjahre am Polytechnischen Institut des Westens in Nantes eine interessante Forschungsarbeit über Säulen und Gittermaste unter dem Einfluß von „sympathischen" Pendeln, also von Pendel und Folgependel durch, die einen Weg zeigt, wie man das Trägheitsmoment fertig aufgestellter Gittermaste oder von Modellen derselben mit äußerst einfachen Mitteln nachprüfen oder bestimmen kann. Die Arbeit ist im Forschungsheft (Travaux de recherches) des Instituts, Jahrgang 1930, auf S. 11 bis 25 enthalten.

Die Pendel werden an einem Querhaupt der Säule rechts und links von ihr auf Schneiden aufgehängt. Stößt man das eine an, so setzt sich das andere allmählich in Bewegung. Seine Amplitude wird größer und größer, erreicht ein Maximum, nimmt dann wieder auf Null ab und beginnt danach wieder von neuem zu wachsen. Nach vielen wiederholten Malen findet schließlich kein vorübergehender Stillstand des Folgependels mehr statt, sondern seine Amplitude nimmt nur einen Kleinstwert an und wird nicht mehr ganz null. Im Anfang aber sind seine langperiodischen Stillstände ganz scharf ausgeprägt.

Da die Energiemenge des ganzen Systems praktisch konstant sein muß, so ändert sich diejenige des Pendels I umgekehrt wie die von Pendel II. Sind beide Pendel gleich lang und gleich schwer, so erreichen ihre Amplituden gleiche Größe. Die Übertragung der Energie auf Pendel II geschieht durch die sehr kleinen Schwingungen, die die Säule selbst unter dem Einfluß des Pendels I annimmt. Zur Zeit des stärksten Ausschlags des Pendels II ist volle Resonanz erreicht und durch alsbaldiges zunehmendes Außertrittkommen gelangt Pendel II schließlich wieder zu zeitweisem Stillstand.

Man kann nun die Zeiten τ zwischen 2 solchen Stillständen bestimmen und hieraus bei bekanntem Trägheitsmoment der Säule das Elastizitätsmaß E des Werkstoffes ermitteln oder aber bei bekanntem E das Trägheitsmoment J beliebiger Gittermaste.

Tessier entwickelt die Bewegungsgesetze ganz allgemein für den Fall ungleicher Pendel. Bei völlig gleichen Pendeln entsteht aus ihnen die Beziehung

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{C+D} - \sqrt{C-D}},$$

worin

$$C = M \cdot g \cdot \frac{K \cdot J \cdot h + M^2 \cdot g \cdot h^2}{K \cdot J^2 + 2\, M^2 \cdot g \cdot J \cdot h}$$

und

$$D = M \cdot g \cdot \frac{M^2 \cdot g \cdot h^2}{K \cdot J^2 + 2\, M^2 \cdot g \cdot J \cdot h}$$

zu setzen ist, wenn

M die Masse jedes Pendels,
g die Erdbeschleunigung,
l die Länge der Säule,
h die Länge der Pendel bis zu ihrem Schwerpunkt bezeichnet und

$$K = 3 \cdot \frac{E \cdot J}{l^3} \text{ ist.}$$

Mit Bleipendeln von 86 mm Durchmesser und 42 mm Dicke ergab sich auf diese Weise bei einem Kupferstab als Säule von 10 mm Durchmesser und 351 mm Länge eine Periodenzeit τ von 41,5 Sekunden und daraus das Elastizitätsmaß

$$E = 1{,}18 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 .$$

Eine viereckige Säule aus Stahl dagegen von 12 mm Seiten- und 458 mm Gesamtlänge gab

$$\tau = 277 \text{ Sekunden und}$$

$$E = 2{,}01 \cdot 10^6 .$$

Die 10 verschiedenen Gittermastmodelle, die Tessier nach derselben Methode prüfte, waren 58 cm hoch. Das Modell ohne Querstäbe und ohne Diagonalen ergab $\tau = 179$ Sekunden und $J = 0{,}57$ cm⁴. Mit einem Querstab in halber Höhe dagegen 227 Sekunden und 0,727 cm⁴. Mit zwei Querstäben in je etwa ein Drittel der Länge 272 Sekunden und 0,874 cm⁴. Durch Einziehen von je einer Diagonale in die 6 Felder des letzteren stiegen die Werte auf 342 Sekunden und 1,0875 cm⁴.

Erich Schneckenberg, Aachen. 193

Nomogramm der allgemeinen Gleichung dritten Grades. II. Ich habe seiner Zeit gezeigt[1]), wie man eine einfache Rechentafel zur Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades herstellen kann. Diese Rechentafel habe ich an unzähligen Beispielen, die ich der Praxis entnommen habe, erprobt und hat sie sich als brauchbar erwiesen, obwohl außer den graphischen auch numerische Operationen notwendig waren. Vom nomographischen Standpunkt aus müßte aber eine Lösung gefunden werden, bei welcher nach Möglichkeit die ganze Rechnung am graphischen Wege vollzogen wird. Ich möchte daher eine neue Rechentafel für die allgemeine Gleichung dritten Grades zeigen, bei welcher man die Gleichung auf graphischem Wege, und zwar mit Hilfe eines Systems von Fluchtlinientafeln, lösen kann.

Es hat mich dabei folgender Gedanke geleitet. Es sei

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

die gegebene Gleichung, die durch Substitution

$$x = y - \frac{a}{3}$$

auf die Gleichung

$$y^3 + p\,y + q = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

gebracht werden kann, wobei

$$p = -\frac{a^2}{3} + b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und

$$q = \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} a\,b + c \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ist. Die Gl. (2) kann nomographisch sehr einfach mit Hilfe der bekannten D'Ocagneschen Rechentafel[2]) gelöst werden, selbstredend wenn p und q bekannt sind. Wenn aber die Gl. (1) gegeben ist, sind uns die Größen p und q nicht unmittelbar

[1]) Vranić, Nomogramm der allgemeinen Gleichung dritten Grades. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 10. Berlin 1930. S. 623.

[2]) D'Ocagne, Traité de Nomographie. Paris 1921. pg. 221.

bekannt. Ich habe versucht, die Größen p und q nomographisch zu lösen und nachdem dieselben gefunden worden sind, anschließend daran auch die Wurzeln der kubischen Gleichung zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe ist mir auf folgende Weise gelungen:

Wir wollen vor allem die Gl. (3) betrachten. Dieselbe kann mittels der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l_1 \frac{a^2}{3} \\ 1 & 1 & l_2 p \\ 1 & \frac{l_1}{l_1 - l_2} & \frac{l_1 l_2}{l_1 - l_2} b \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

dargestellt werden, wobei l_1 und l_2 beliebige Module sind, die wir nachträglich bestimmen wollen. Ebenso wollen wir später auch die Module, die in den folgenden Determinanten vorkommen, feststellen.

Die Gl. (4) kann man in folgende zwei Gleichungen aufteilen:

$$q_1 = \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} a b \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und

$$q = q_1 + c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

die auf die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & l_3 b \\ 1 & 1 & l_4 q_1 \\ 1 & \frac{3 l_3}{3 l_3 + l_4 a} & \frac{2 l_3 l_4 a^3}{9 (3 l_3 + l_4 a)} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (8),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & l_5 c \\ 1 & 1 & l_6 q \\ 1 & \frac{l_5}{l_5 - l_6} & \frac{l_5 l_6}{l_5 - l_6} q_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

gebracht werden können. Der Gleichung

$$y^3 + p y + q = 0$$

entspricht die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & l_7 p \\ 1 & 1 & l_8 q \\ 1 & \frac{l_7}{l_7 + l_8 y} & -\frac{l_7 l_8 y^3}{l_7 + l_8 y} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (10).$$

Diesen Determinanten entsprechen vier Rechentafeln, die so eingezeichnet werden müssen, daß sie zusammen ein Ganzes ergeben. Damit dies mögsich ist, müssen die zugehörigen Leitern dieser Rechentafeln zusammenfallen, es muß demnach

$$l_7 = l_2, \; l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_1 - l_2}, \; l_4 = \frac{l_5 l_6}{l_5 - l_6}, \; l_8 = l_6$$

sein. Die Module müssen des weiteren so bestimmt werden, damit die zu erhaltende Rechentafel allen Forderungen, die an sie gestellt werden, genügen kann. Wir können z. B. nehmen

$$l_1 = \frac{1}{3}, \; l_2 = \frac{1}{4}, \; l_5 = 1, \; l_6 = \frac{1}{10}.$$

Daraus folgt

$$l_3 = 1, \; l_4 = \frac{1}{9}, \; l_7 = \frac{1}{4}, \; l_8 = \frac{1}{10},$$

so daß wir, nachdem wir noch einige einfache Rechenoperationen innerhalb einer jeden Determinante durchführen, obige Determinanten in folgender Form schreiben können:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{a^2}{9} \\ 1 & 5 & \frac{1}{4} p \\ 1 & 20 & b \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & b \\ 1 & 30 & \frac{1}{9} q_1 \\ 1 & \frac{810 + 20 a}{27 + a} & \frac{2 a^3}{9 (27 + a)} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (12),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & c \\ 1 & 29 & \frac{1}{10} q \\ 1 & 30 & \frac{1}{9} q_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{4} p \\ 1 & 29 & \frac{1}{10} q \\ 1 & \frac{145 + 10 y}{5 + 2 y} & -\frac{y^3}{2 (5 + 2 y)} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (14).$$

Der ersten Determinante entspricht eine Rechentafel, die aus drei parallelen Leiterträgern im Abstande 0, 5 und 20 vom Ordinatenmittelpunkt besteht. Die entsprechenden Leitern sind $-\frac{1}{9} a^2$, $\frac{1}{4} p$ und b.

Der zweiten Determinante entspricht eine Rechentafel, welche aus zwei parallelen Trägern im Abstande 20 und 30 vom Ordinatenmittelpunkt und einer krummlinigen Leiter besteht. Die erste Leiter lautet b, die zweite $\frac{1}{9} q_1$, dagegen hat die krummlinige Leiter die Gleichung

$$\xi = \frac{810 + 20 a}{27 + a}, \quad \eta = \frac{2 a^3}{9 (27 + a)}.$$

Die dritte Determinante ist durch eine Rechentafel mit drei parallelen Leiterträgern im Abstande 20, 29 und 30 mit den Leitern c, $\frac{1}{10} q$ und $\frac{1}{9} q_1$ dargestellt.

Die vierte Determinante ist eine Rechentafel, die aus zwei parallelen Leitern $\frac{1}{4} p$ und $\frac{1}{10} q$ im Abstande 5 und 29 und der Kurve

$$\xi = \frac{145 + 10 y}{5 + 2 y}, \quad \eta = -\frac{y^3}{2 (5 + 2 y)}$$

besteht. Wenn wir die entsprechenden Rechentafeln aufzeichnen, erhalten wir das nebenstehende Bild, welches eben eine Rechentafel für die allgemeine Gleichung dritten Grades darstellt. Auf diesem Bilde sind für uns nur die Leitern a, b, c und y

wichtig, deshalb haben wir auf den Trägern p, q_1 und q keine Leitern aufgetragen, da uns — wie wir es unten noch sehen werden — die auf diesen Leitern gefundenen Punkte numerisch nicht interessieren.

Die Anwendung dieser Rechentafel wollen wir an einem speziellen Beispiele erläutern. Es sei beispielsweise die Gleichung

$$x^3 + 9x^2 - 12x - 20 = 0$$

gegeben, d. h.

$$a = 9, \; b = -12, \; c = -20.$$

Da

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

sein muß, haben wir weiter

$$y_3 = -7,$$

so daß auf diese Weise alle drei Wurzeln der reduzierten Gleichung ermittelt sind. Aus diesen Werten erhalten wir

$$x_1 = -1, \; x_2 = 2, \; x_3 = -10$$

und ist auf diese Weise die allgemeine Gleichung dritten Grades mittels lauter Fluchtlinientafeln gelöst.

Wir suchen auf der geradlinigen a-Leiter den Punkt 9 auf. Diesen Punkt verbinden wir mit dem Punkte -12 der b-Leiter. Diese Gerade (1) schneidet die p-Leiter im Punkte P. Dann verbinden wir den Punkt -12 der b-Leiter mit dem Punkte 9 auf der krummlinigen a-Leiter. Diese Gerade (2) schneidet die q_1-Leiter im Punkte Q_1. Diesen Punkt Q_1 verbinden wir mit dem Punkt -20 der c-Leiter, die Verbindungsgerade (3) schneidet die q-Leiter im Punkte Q. Endlich verbinden wir die Punkte P und Q, die so entstandene Gerade (4) schneidet die krummlinige y-Leiter in den Punkten M_1 und M_2, denen die Werte

$$y_1 = 2, \; y_2 = 5$$

entsprechen. Diese Werte sind die Lösungen der reduzierten Gleichung

$$y^3 + py + q = 0.$$

Die negativen Wurzeln der reduzierten Gleichung können im allgemeinen wie folgt ermittelt werden. Wenn wie oben der Punkt Q gefunden ist, genügt es, auf der q-Leiter im entgegengesetzten Sinne und in gleicher Entfernung den Punkt Q' aufzutragen. Die Gerade PQ' schneidet die y-Kurve in Punkten, die, mit negativem Vorzeichen versehen, den negativen Wurzeln entsprechen. In unserem Beispiele schneidet PQ' die y-Kurve im Punkt M_3 mit der Bezeichnung 7, d. h. $y_3 = -7$ ist die negative Wurzel.

Falls man bei der Ermittlung der negativen Wurzeln die Inanspruchnahme eines Zirkels vermeiden will, kann man auch so vorgehen, daß man bei Aufsuchung der Wurzel statt a und c, $-a$ und $-c$ nimmt und dem so erhaltenen Punkte ein negatives Vorzeichen beigibt. Die Lösung ist in unserem Bilde mittels gestrichelter Geraden (2′) bis (4′) ersichtlich gemacht worden.

Da die Richtigkeit der oben beschriebenen Methoden, mit welcher die negativen Wurzeln ermittelt werden, sehr leicht bewiesen werden kann, möchte ich aus Raummangel darauf nicht näher eingehen. Ich möchte nur feststellen, daß wir mit Hilfe unserer Rechentafel tatsächlich alle reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

am graphischen Wege ermitteln können. Wir erhalten zwar mit Hilfe dieser Rechentafel nur die Wurzeln y_1, y_2 und y_3 und müssen dann noch aus der Gleichung

$$x = y - \frac{a}{3}$$

die Wurzeln x_1, x_2 und x_3 finden, jedoch, da diese Rechenoperation äußerst einfach ist, so ist es wirklich nicht schwer, von y_1, y_2 und y_3 auf die gesuchten Wurzeln x_1, x_2 und x_3 zu gelangen.

Man könnte auch fragen, wie die komplexen Wurzeln ermittelt werden sollen. In der Regel brauchen wir dieselben nicht, wenn trotzdem in einem Anwendungsgebiete die Aufsuchung dieser Wurzeln notwendig sein sollte, dann kann für die Ermittlung der komplexen Wurzeln mit Erfolg die Methode, die unlängst die Herren Heck und Walther gezeigt haben, benützt werden[3]).

Zagreb. Vladimir Vranić. 177

Lösungstypen elastostatischer Probleme. Bei der elastostatischen Behandlung von dünnwandigen Rohren aus Hookeschem Idealmaterial und von Vollstäben aus einem beschränkt Hookeschem Material mit ausgeprägter Plastizitätsgrenze bin ich auf Lösungsformen gestoßen, die in ihren Eigenschaften von den üblichen Lösungen wesentlich abweichen. Es erscheint daher gerechtfertigt, die bisher bekannten Lösungstypen der (auch auf beschränkt Hookesches Material erweiterten) Elastostatik vom Standpunkt ihrer kennzeichnenden Eigenschaften zusammenfassend zu betrachten.

Wir wollen vorerst annehmen, daß auf alle einschränkenden Voraussetzungen der klassischen Theorie verzichtet werde, daß somit allgemein auch die Beeinflussung der geometrischen Abmessungen des Systems sowie die Wirkungsweise der angreifenden Kräfte (Konstellation des Kraftfeldes) durch die eintretende endlich große Deformation mit Schärfe berücksichtigt erscheint, und denken uns nun die Lösungen für die mannigfaltigen elastostatischen Probleme unter Meisterung der mathematischen Schwierigkeiten entwickelt. Diese vollkommen „exakten" Lösungen werden im allgemeinen keinen durch eine Gerade darstellbaren und in diesem Sinne „linearen" Zusammenhang zwischen dem gemeinsamen Multiplikator der äußeren Belastung und der entstehenden Deformation liefern. An Hand dieser „exakten" Lösungen könnten wir nun die elastostatischen Probleme innerhalb eines vorgegebenen, in seinen Grenzen durch Werkstoffeigenschaften u. a. festgelegten Untersuchungsbereiches in Probleme mit eindeutiger und Probleme mit mehrdeutiger „exakter" Lösung unterteilen. Für die Gruppe der „eindeutigen" Gleichgewichtsprobleme bedeuten alle jene, den mathematischen Apparat wesentlich vereinfachenden Annahmen, die auf eine „Linearisierung" der Lösung im angegebenen Sinne (Proportionalität zwischen Belastung und Deformation) hinzielen, einzig eine bewußte Zulassung mehr oder wenig großer Fehler rein quantitativer Natur. Der weitaus größte Teil der bekannten Lösungen gehört dieser ersten Hauptgruppe an; die Möglichkeit, eine derartige „Linearisierung" innerhalb sehr enger Fehlergrenzen durchführen zu können, verdanken wir bekanntlich der relativen Größe der Elastizitätskonstanten unserer Werkstoffe. Von den unzähligen hergehörigen Problemen der klassischen Theorie und der Baustatik greifen wir etwa den instruktiven Fall des exzentrisch gedrückten Hookeschen Idealstabes heraus, dessen Angriffshebel von beliebiger, jedoch nicht entgegengesetzt gleicher Größe sein mögen. Die „exakte" Lösung ist nicht durch eine Gerade darstellbar, nicht „linear", jedoch innerhalb des üblichen Untersuchungsbereiches eindeutig (Abb. 1a) und die Frage der „Linearisierung" zur Vereinfachung der Rechnung ist einzig eine Frage des auftretenden und zugelassenen quantitativen Fehlers. Bei sehr gedrungenen Stäben mit bedeutungsloser Ausbiegung „linearisiert" man die Lösung und kann sich damit des Superpositionsprinzips bedienen; bei schlankeren Bauwerkstäben pflegt man den Einfluß der Deformation auf das Kräftespiel mit einem vereinfachten Ansatz zu berücksichtigen und schließlich wird bei extrem schlanken Stäben mit großen Ausbiegungen der exakte Ansatz im Rahmen theoretischer Untersuchungen in Rechnung gestellt.

Die zweite Hauptgruppe der elastostatischen Probleme ist, wie erwähnt wurde, dadurch gekennzeichnet, daß die „exakten" Lösungen innerhalb des Untersuchungsbereiches mehrdeutig sind. Diese Hauptgruppe wollen wir unterteilen in die Untergruppe der „Stabilitätsprobleme" und in die Untergruppe der „Probleme mit kritischen Zuständen". Wird ein Hookesches Idealmaterial vorausgesetzt, dann kann die Lösungsform der „Stabilitätsprobleme" etwa durch Abb. 1b, die sich auf den klassischen Fall des zentrisch gedrückten, schlanken Vollstabes bezieht, dargestellt werden. Es ist hierbei aber belanglos, daß an der Stabilitätsgrenze der Übergang von biegefreien Formen in ausgebogene Gleichgewichtsfiguren stattfindet, denn im Falle der „reinen Fachwerksknickung", auf die v. Mises (Z. f. ang. Math. u. Mechanik 1923) hingewiesen hat, tritt eine Biegung überhaupt nicht in Erscheinung und umgekehrt ist im Falle der Knickung durch exzentrischen Druck mit entgegengesetzt gleichen, also wechselseitig liegenden Hebelsarmen (welchen Fall ich in der Z. f. ang. Math. u. Mech. 1930 behandelt habe) überhaupt kein biegungsfreier Gleichgewichtszustand vorhanden (Lösungsform Abb. 1c). Berücksichtigt man neben der ersten Hauptgruppe noch diese Untergruppe der „Stabilitätsprobleme" bei Hookeschem Idealmaterial, dann besteht der Inhalt des Kirchhoffschen Eindeutigkeitssatzes in der von v. Mises l. c. gegebenen Formulierung darin, daß für die gegebene Belastung ein gemeinsamer Multiplikator „λ_0" existiert, unterhalb dessen ein eindeutiger, stabiler Gleichgewichtszustand besteht, der sich für „$\lambda \to 0$" dem natürlichen Zustand anschließt. Da der lastfreie Zustand eindeutig ist, muß es auch ausreichend kleine Werte „λ" geben, die die Nullstelle der Systemdeterminante noch nicht erreichen.

Neben den Stabilitätsproblemen existiert als zweite Untergruppe die, wie ich glaube, neuartige Gruppe der „Probleme mit kritischen Gleichgewichtszuständen". Setzen wir ein Hookesches Idealmaterial voraus, dann gehört z. B. der Fall der reinen Biegung und der Fall des exzentrischen Druckes dünnwandiger, kreiszylindrischer Rohre mit gerader Achse und freien Rändern zu dieser Untergruppe; Abb. 2a und b zeigt die Lösung dieser

[3]) Heck und Walther, Nomogramme für die komplexen Wurzeln charakteristischer (insbesondere quadratischer und kubischer) Gleichungen von Schwingungsproblemen. Ingenieur-Archiv, Bd. I. Berlin 1930. S. 611.

beiden Gleichgewichtsprobleme, die ich in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, IIa, 1931, p. 163, behandelt habe; die Lösungskurve Abb. 2a nähert sich asymptotisch der Abszissenachse, auf der die Achsenkrümmung $\frac{1}{\varrho}$ aufgetragen wurde, während die Lösungskurve Abb. 2b plötzlich abbricht, so daß für weiter ansteigende Ausbiegungen keine Gleichgewichtslagen mehr existieren. Der Lösungscharakter wäre noch ausgeprägter, wenn der Rohrmantel achsenparallele Scharniere in der neutralen Ebene besitzen würde. Auch Probleme, deren Lösungen zusätzlich auf Gleichgewichtsverzweigungen (Stabilitätsgrenzen) führen, fallen in den Rahmen dieser Untergruppe, wie die Probleme des zentrisch gedrückten oder des mit entgegengesetzt gleichen (also wechselseitig liegenden) Hebelsarmen exzentrisch gedrückten schlanken, dünnwandigen Rohres, welche Fälle gleichfalls in der zitierten Abhandlung untersucht wurden und deren Lösungen in Abb. 2c und 2d dargestellt sind.

Läßt man ein beschränkt Hookesches Material mit ausgeprägter Plastizitätsgrenze zu, dann gehören auch die Fälle des exzentrisch gedrückten Vollstabes und, als Probleme mit Gleichgewichtsverzweigung, die Fälle des zentrisch und des mit entgegengesetzt gleichen Hebelsarmen exzentrisch gedrückten Vollstabes aus Baustahl in den Bereich dieser Untergruppe. Die zugehörigen Lösungsformen sind in Abb. 3a, b, c dargestellt; die Lösung für die ersten beiden Fälle habe ich in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, 1928, und im Bericht der II. Int. Tagung für Brückenbau und Hochbau, 1928, behandelt, während die Lösung nach Abb. 3c, sowie die verschiedenen, ebenfalls hergehörenden strengen Lösungen für den primär krummen oder den querbelasteten oder den elastisch eingespannten Druckstab aus Baustahl demnächst veröffentlicht werden.

Die Lösungen dieser „Probleme mit kritischen Gleichgewichtszuständen" sind dadurch gekennzeichnet, daß innerhalb des vorgegebenen Untersuchungsbereiches ein kritischer (dem Maximum der Lösungskurve zugeordneter) Multiplikator „λ_{Kr}" existiert, so daß für „$\lambda \leq \lambda_{Kr}$" eine mehrdeutige Lösung vorhanden ist und für „$\lambda > \lambda_{Kr}$" keine oder zumindest keine stabile Gleichgewichtslage besteht. Im Falle Abb. 2a ist die Lösung für alle endlich großen vorkritischen Laststufen mehrdeutig; in den Fällen Abb. 2b, c, d und Abb. 3a, b, c gibt es unterhalb der kritischen Laststufe außer dem Bereich mit mehrdeutiger Lösung auch einen solchen mit nur eindeutiger Lösung. Oberhalb der kritischen Laststufe existieren in den Fällen nach Abb. 2a, b und Abb. 3a überhaupt keine Gleichgewichtsfiguren, während im Falle Abb. 2c und 3b einzig die labile, gestreckte Lage vorhanden ist; wie weiters die Fälle Abb. 2d und 3c zeigen, kann die Lösung für den labilen Gleichgewichtszustand auch mehrdeutig sein und einen „kritischen" Zustand aufweisen.

Die geschilderten Fälle reichen aus, um den Formenreichtum der Lösungen innerhalb dieser neuartigen Untergruppe elastostatischer Probleme aufzuzeigen. Da die Mehrdeutigkeit der Lösung unterhalb der kritischen Laststufe zu den Kennzeichen dieser Problemgruppe gehört, erscheint es erforderlich, die zitierte Formulierung des Kirchhoffschen Eindeutigkeitssatzes einer Revision zu unterziehen. Der einwandfreie Inhalt dieses Satzes würde dann lediglich in der folgenden Feststellung zum Ausdruck kommen: Ist die Belastung bis auf einen gemeinsamen Multiplikator „λ" gegeben, dann gibt es einen Betrag „λ_0", so daß für alle Werte „$\lambda < \lambda_0$" eindeutige Gleichgewichtslagen bestehen; dieser Betrag „λ_0" kann jede beliebige Größe annehmen und kann sich auch unbeschränkt der Null nähern. Nun verliert aber diese Aussage durch die hinzugefügte umfassende Einschränkung, die erforderlich erschien, um auch die elastostatischen Probleme der „kritischen Gleichgewichtszustände" einbeziehen zu können, meines Erachtens überhaupt den Charakter eines Lehrsatzes.

Brünn. E. Chwalla. 179

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus zu beziehen.)

W. **WIEN** und F. **HARMS**, Handbuch der Experimentalphysik, Band 4, Hydro- und Aerodynamik. 1. Teil: Strömungslehre und allgemeine Versuchstechnik. Herausgegeben von Ludwig Schiller, Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1931. 730 S. Preis brosch. 66 M, geb. 68 M.

Der jetzt vorliegende erste Teil der der Hydro- und Aerodynamik gewidmeten Abschnitte des Handbuchs[1]) muß mit besonderem Interesse begrüßt werden. Er enthält zum erstenmal eine ausführliche, ziemlich abgeschlossene Übersicht über die neueren Ergebnisse der hydrodynamischen Forschung, wie sie in den Arbeiten der Göttinger Schule zum Ausdruck kommen. Prandtl selbst gibt in einer kurzen Einleitung eine elementare, aber um so anschaulichere, leicht verständliche Einführung in die Grundbegriffe der Strömungslehre; sie wird für den größten Teil der Benutzer des Handbuches äußerst wertvoll sein. Ein umfassendes Kapitel von Falkenhagen über klassische Hydrodynamik erhält durch zahlreich eingestreute experimentelle Ergänzungen, die zum Teil von H. Schmiedel herrühren, besonderen Reiz. Die theoretischen Ausführungen sind allerdings recht schablonenhaft und halten sich nicht frei von vielverbreiteten Fehlern, wie z. B. der üblichen unrichtigen Ableitung des ersten Helmholtzschen Wirbelsatzes. In zwei Beiträgen von Tollmien über Grenzschichttheorie und über turbulente Strömungen erhält man einen ausgezeichneten Einblick in die augenblicklich vom Göttinger Kreise vertretene Auffassung der grundlegenden hydrodynamischen Fragen. Die Ausführungen werden noch unterstützt durch die schönen Strömungsbilder, die Tietjens am Ende des Bandes beisteuert. Das umfassende Referat Busemanns über Gasdynamik beschäftigt sich mit einem bestimmten Ausschnitt der aerodynamischen Fragen, der zum Teil vom Autor selbst früher in mehreren Arbeiten behandelt worden ist. Ein wenig durchforschtes Gebiet, die Hohlraumbildung (Kavitation) in Flüssigkeiten bringt Ackeret dem weiteren Leserkreis in anschaulicher Form nahe. Dem Charakter des Handbuches entsprechend ist die Meßtechnik aufs eingehendste berücksichtigt: in besonderen Artikeln über Druckmessung, über Mikromanometer, über Geschwindigkeits- und Mengenmessungen von Flüssigkeiten und über die Hitzdrahtinstrumente.

Mit diesem Band des Harms-Wienschen Handbuches ist ein wichtiges Werk geschaffen worden, das auf lange Zeit hinaus für die Forschung und den Unterricht in der Hydromechanik nach der physikalischen Seite hin maßgebend bleiben wird.

Mises. 206

Dr. HORST VON **SANDEN**, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Darstellende Geometrie. VIII + 111 S. mit 114 Abb. im Anhang. Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1931. Bd. 2 aus: Teubners mathematische Leitfäden. Preis geb. 6.40 M.

Das kleine Büchlein enthält die wichtigsten Angaben über die Ausführung einfacher Konstruktionen im Grund- und Aufrißverfahren, mit einigen Zusätzen über Axonometrie und Zentralperspektive. In den Vordergrund gestellt ist stets das Interesse an der Gewinnung anschaulicher, für die Zwecke der Technik geeigneter Zeichnungen. Auf geometrische Zusammenhänge wird nicht eingegangen.

Mises. 206

[1]) Vgl. diese Zeitschrift 10, 1930, S. 418.

KARL **MACK**, o. Professor der darstellenden Geometrie an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag, Geometrie der Getriebe. Verlag Julius Springer, Berlin und Wien 1931. VI + 93 S. Preis kart. 8,50 M.

Das Buch würde passender „Einführung in die geometrische Kinematik" heißen. Es bringt auf etwa 50 Seiten die klassischen Sätze über die ebene Bewegung in leichtverständlicher Fassung mit guten Abbildungen. Hierauf wird die Bewegung um einen festen Punkt betrachtet, wobei vielleicht die Theorie der nomonischen Abbildung hervorzuheben wäre. Schließlich sind einige Seiten der allgemeinen Schraubenbewegung gewidmet.

Mises. 206

Dr.-Ing. EMIL **KOHLWEILER**, Statistik im Dienste der Technik. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1931. XV + 441 S. mit 82 Ab. und 37 Zahlentafeln. Preis 22 M.

In wachsendem Maße beginnt man sich in der Technik allgemeiner statistischer Methoden zu bedienen. Ganz abgesehen von Fällen, in denen die Durchführung bestimmter technischer Aufgaben wesentlich von statistischen Überlegungen abhängt, wie etwa bei der Anlage selbsttätiger Fernsprechämter, handelt es sich darum, daß jeder industrielle Fabrikationsprozeß als Massenerscheinung im Sinne der Statistik aufgefaßt werden muß. In dieser Richtung liegen die schon früher an dieser Stelle besprochenen Veröffentlichungen von Becker, Plaut und Runge, sowie das kleine Sammelwerk von Plaut über Fabrikationskontrolle. Auch das vorliegende umfangreiche Werk ist diesem Aufgabenkreis gewidmet.

Der Verfasser beginnt mit einer eingehenden Untersuchung darüber, was als Gegenstand statistischer Betrachtung dienen kann. Er kennt den vom Referenten entwickelten mathematischen Begriff des „Kollektivs" und sucht ihn, indem er die strenge Definition durch Veranschaulichungen ersetzt, zu popularisieren. Man hat wohl nicht den Eindruck, daß in diesem schwierigen Punkte überall volle Klarheit erreicht ist, aber das Ziel, den Leser mit den wichtigsten Grundtatsachen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut zu machen, wird erreicht.

Nun folgen fast zweihundert Seiten des Buches, die der Aufzählung, Beschreibung und Abbildung von Verteilungen gewidmet sind, wie sie innerhalb theoretischer oder praktisch beobachteter Kollektivs vorkommen. Hierbei tritt sehr stark das in dem Untertitel des Werkes genannte spezielle Anwendungsgebiet hervor, indem Dutzende von Beispielen aus der Drahtfabrikation zur ausführlichen Darstellung gelangen, die Verteilung der Festigkeiten, der Dehnungen verschiedener Drahtsorten, Verteilung der Produktionsziffern, der Bedienungsmöglichkeiten von Maschinen usf. Der Ertrag dieser Ausführungen für den Leser ist sehr gering. Für den, der statistische Methoden studieren will, wären weit weniger Beispiele hinreichend gewesen; wer aber sich speziell für das statistische Verhalten von Drähten interessiert, wird die Auswahl des Gebotenen als willkürlich empfinden.

Der zweite, noch etwas umfangreichere Teil des Buches beschäftigt sich mit der Erklärung der üblichen statistischen Maßzahlen, der Mittelwerte und Streuungsgrößen, und wendet sich erst zum Schlusse dem eigentlichen Hauptproblem der theoretischen Statistik zu, dem Vergleich beobachteter Häufigkeitsverteilungen mit theoretischen Kollektivs. Hier werden vom Verfasser die Haupt-

sätze der Lexisschen Dispersionstheorie angeführt und veranschaulicht, merkwürdigerweise ohne jedes Eingehen auf die doch durchaus nicht schwierigen oder tiefliegenden mathematischen Zusammenhänge. Wirkt schon in den früheren Teilen des Buches die Tendenz des Verfassers, immer nur zu referieren und nichts abzuleiten, etwas störend, so muß man an dieser Stelle sein Verfahren ganz ablehnen. Solche Dinge, wie die Zerlegung einer beobachteten Schwankung in eine sog. wesentliche und eine unwesentliche Schwankungskomponente lassen sich doch nicht einfach erzählen, zumal ohne Hinweis auf eine Stelle, an der eine sachgemäße Begründung zu finden wäre. Es ist zwar richtig, daß nicht jeder, der ein Logarithmenbuch verwendet, auch imstande sein muß, Logarithmen zu berechnen, aber die einfachsten Grundbeziehungen aus der Theorie des Logarithmierens muß er doch übersehen, wenn er sich nicht weitgehenden Fehlermöglichkeiten aussetzen will. Auf dem Gebiete der mathematischen Statistik hat schon vor mehreren Jahren Charlier eine Art von Rezeptbuch geschaffen, das ohne Mitteilung der Beweise und Ableitungen die in der Praxis zu verwendenden Methoden angibt. Ihm scheint der Verfasser zu folgen. Es ist aber weder im Interesse der Wissenschaft noch in dem der Praktiker gelegen, daß dieses Vorbild allzuviel Nachahmung findet.

Im ganzen wird man das verdienstliche Bestreben des Verfassers anerkennen, dem Techniker ein Buch in die Hand zu geben, das ihn über die Praxis statistischer Untersuchungen unterrichtet. Aber man kann nur wünschen, daß dem Autor recht bald die Gelegenheit zu einer völligen Neubearbeitung geboten und von ihm auch benutzt wird: die Fülle der ausgeführten Beispiele müßte verringert, die Systematik erhöht, und vor allem jedem vorgetragenen methodischen Gedanken die sachliche Begründung, bzw. die mathematische Ableitung beigefügt werden. Dann kann ein Werk entstehen, das — bei weit geringerem Umfang — die Aufgabe, die der Verfasser sich gestellt hat, in brauchbarer Weise erfüllt.

Mises. 206

Dr. K. **SCHÜTT**, Einführung in die Physik des Fliegens. Mit 36 Schauversuchen und 87 Abb. (Luftfahrt und Schule. Im Auftrage des Deutschen Luftfahrt-Verbandes E. V. Heft 1.) Verlag C. J. E. Volckmann Nachf. G. m. b. H., Berlin-Charlottenburg 1931. 128 S. Preis 4 M.

Eine ganz elementare Einführung in die einfachsten Grundgesetze der Fluglehre, bestimmt für Anfänger, die sich dem Segelflug oder dem Motorflug zuwenden wollen. Der Verfasser hat die vorhandene Literatur fleißig benutzt und eine im wesentlichen brauchbare Zusammenstellung geliefert.

Mises. 189

„Hütte." Des Ingenieurs Taschenbuch. 26. Aufl. Herausgegeben vom Akademischen Verein Hütte, E. V., in Berlin. 1. Bd.: Grundlagen der Technik. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1931. 1199 S. m. 970 Abb. Preis in Leinen 17,50 M, in Leder 20,50 M.

Die Neuauflage enthält wieder eine Reihe begrüßenswerter Neuerungen, Ergänzungen und Umarbeitungen. Im Abschnitt „Mathematik" wurden die Zahlentafeln wesentlich erweitert und Anweisungen über zweckmäßige Interpolation der Tafelwerte beigefügt. Etwas fraglich bleibt der Wert von Zusätzen, die ganze Kapitel der Mathematik in wenigen Zeilen zu behandeln versuchen, z. B. eines Abschnittes über mathematische Statistik, der knapp eine Seite umfaßt (und, nebenbei bemerkt, eine ungenaue Erklärung der „Streuung" bringt). Im Abschnitt über Mechanik tritt die Erweiterung der Mechanik bildsamer Körper (Plastizität) und der Hydro- und Aerodynamik besonders wirksam hervor. Ohne Einschränkung kann man aussprechen, daß die Schriftleitung es wiederum verstanden hat, gemeinsam mit dem Stabe ausgezeichneter Mitarbeiter das Taschenbuch auf der Höhe der Entwicklung zu halten.

Mises. 189

W. **NERNST**, o. Professor an der Universität Berlin, und A. **SCHOENFLIES** †, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Elfte, von W. Nernst und Dr. W. Orthmann neubearbeitete Auflage. Mit 108 Figuren. Verlag von R. Oldenbourg. München und Berlin 1931. XIV + 478 S. Preis 20 M.

Das Buch[1]) erfüllt in bekannt ausgezeichneter Weise die Aufgabe, den Studierenden der „Chemie und anderer der Mathematik früher fernstehender Naturwissenschaften" das mathematische Rüstzug zu bieten. Einige Zusätze in dem Kapitel über Differentialgleichungen zeichnen die neue Auflage aus, die — nach dem Tode von A. Schönflies — für den mathematischen Teil in Herrn W. Orthmann einen sorgfältigen und sachkundigen Bearbeiter gefunden hat.

H. Pollaczek-Geiringer. 205

JAMES B. **SCARBOROUGH**, Ph. D., Associate Professor of Mathematics at the U. S. Naval Academy. Numeral Mathematical Analysis. Baltimore: The Johns Hopkins Press, London: Humphrey Milford Oxford University Press 1930. 416 S. Preis 5,50 Dollar.

Das über 400 Seiten umfassende Werk dürfte den mit der Literatur des Gegenstandes Vertrauten wenig Neues lehren. In der Auswahl des Stoffes unterscheidet es sich wenig von dem interessanteren und auch weitergehenden Buche von Whittaker-Robinson, The calculus of Observations. Auch das deutsche Werk von Willers über den gleichen Gegenstand bringt gewiß mehr und Gründlicheres. Schwierigere Fragen, an denen die praktische Analysis so reich ist, werden vom Verfasser nur kurz gestreift oder unberührt gelassen (Auflösung von Systemen von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Systeme linearer Gleichungen, exakte Fehlerschätzungen u. a. m.). Hingegen wird z. B. nach Angabe der allgemeinen Interpolations-Restformel diese in voller Breite auf jeden einzelnen der Fälle von Newton, Bessel usw. spezialisiert. Anderseits aber wird das charakteristische Fehlerglied der wesentlich abweichenden Gauß'schen Quadratur schließlich nicht gewonnen.

Das Buch ist reich an hübschen lehrreichen Beispielen, wie denn überhaupt der gebotene Stoff mit verhältnismäßig geringer Mühe gut angeeignet werden kann. Es ist ein Buch für Leser, die Wert auf leichte Faßlichkeit, Breite und pädagogisch gute Darstellung legen. Das noch zu wünschende Werk über praktische Analysis, das, über Referieren und Zusammenfassen hinausgehend, eine organische Verarbeitung, Vertiefung und Klärung der Probleme bringen sollte, ist dies jedenfalls nicht — und wollte es gewiß auch nicht sein.

H. Pollaczek-Geiringer. 205

T.-A. **RAMOS**, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Sao-Paulo. Membre de l'Academia Brasileira de Sciencias. Leçons sur le Calcul Vectoriel. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris 1930. 119 S.

[1]) Dessen frühere Auflage hier angezeigt wurde: Bd. III 1923, S. 71.

Das Buch stellt eine Einführung in die „Vektorrechnung" dar, die, was den behandelten Stoff betrifft, etwa einer 3—4-stündigen Vorlesung über Vektor-Algebra, Vektor-Analysis, Tensorrechnung entsprechen dürfte. Weder in der Auswahl, noch in der Darstellung des behandelten Stoffes konnte Referent wesentlich Neues finden. Doch ist das Buch — bei einigem Mangel an Übersichtlichkeit — doch korrekt und verwendbar. Einige Schwierigkeit dürfte für den deutschen Leser aus der oft sehr abweichenden Bezeichnungsweise entstehen.

H. Pollaczek-Geiringer. 205

Dipl.-Ing. A. T. **TROSKOLANSKI,** wissenschaftl. Mitarbeiter des polnischen Reichsamts für Maß und Gewicht. Podrecznik dla Sprawdzajacych Wodomierze. Tom I. Wybrane dzialy Hydromechaniki W przystepnym Zarysie. (Hilfsbuch für Wassermesserprüfende. I. Bd. Ausgewählte Probleme der technischen Hydromechanik in allgemeinverständlicher Darstellung.) Warszawa. Tloczono w Drukarni Panstwowej, Miodowa 22. 1931. (Warschau. Reichsamt für Maß und Gewicht.) IX + 455 S. 205 Abb. (polnisch).

Das vorliegende Buch bildet eine Erweiterung der Vorlesungen, die der Fachausbildung des technischen Personals im polnischen Eichdienst für Wassermesserprüfung gewidmet wurden. Das Werk soll auch für mittlere technische Lehranstalten dienen. Dementsprechend umfaßt der Band die Grundsätze der technischen Hydrodynamik in elementarer, jedoch (nach Möglichkeit) exakter Form, wobei vorausgesetzt wird, daß der Leser nur etwa die Anfänge der Differential- und Integralrechnung beherrscht. Mit besonderer Aufmerksamkeit ist die Wahl von 115 Übungsaufgaben getroffen worden, die sich in jedem Kapitel befinden. Mit gleicher Sorgfalt sind die Angaben über die polnischen, deutschen und französischen Lehrbücher gemacht, die zur eventuellen Weiterbildung des Lesers dienen sollen. Weniger glücklich ist die Auswahl der geschilderten modernen Hypothesen, die zur Erklärung der hydrodynamischen Erscheinungen dienen. So finden wir z. B. in dem Kapitel, das der Frage der Entstehung von turbulenten Strömungen gewidmet ist, außer einer kurzen Mitteilung über die Anschauungen von Reynolds und H. A. Lorentz, ausführlich nur die Theorie von Herrn Broszko dargelegt, wobei die anderen Autoren nicht einmal erwähnt werden. Begrüßenswert ist die Beifügung eines kurzen technischen polnisch-deutsch-französischen Wörterbuches, das das Studium der ausländischen Literatur dem polnischen Leser erleichtern soll. Der Stil des Buches ist kurz und klar, die Ausstattung sehr sorgfältig.

Inhalt des Buches: Einleitung, kurzer Abriß der allgemeinen Mechanik (Vektorrechnung, Kinematik, Grundlagen der Dynamik, Statik, Arbeit und Energie, Kinetik), Hydrostatik (Pascalsches Gesetz, Gleichgewicht der Flüssigkeit im Schwerfeld und in kommunizierenden Gefäßen, Druckmessungen, Flüssigkeitsdruck, Gleichgewicht schwimmender Körper, Kohäsion und Adhäsion), Dynamik der idealen Flüssigkeit, (Kontinuitätsbedingung, Bernoullische Gleichung, Strömungen mit freien Grenzen). Dynamik der zähen Flüssigkeit (Laminare und turbulente Strömungen), Hydraulik (Strömungen in geschlossenen Leitungen, „zufällige" hydraulische Widerstände, Berechnung der Rohrleitungen, offene Gerinne, Strömungsdruck, Hydrodynamische Reaktion).

Berlin. Stefan Bergmann. 207

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

EUGEN **WIGNER,** Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Aus „Die Wissenschaft", Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik. Herausgegeben von Prof. Dr. Wilh. Westphal. Bd. 85. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1931. VI + 332 S. mit 12 Abb. Preis geh. 27,20 M, geb. 29,60 M.

FRITZ **STAMER,** Leiter der Fliegerschule Wasserkuppe des Forschungsinstituts der Rhön-Rossitten-Gesellschaft e. V., Gleit- und Segelflugschulung. Verlag C. J. E. Volckmann Nachf. G. m. b. H., Berlin-Charlottenburg 1931. 48 S. mit 18 Abb. Preis 2 M.

Dr. KONRAD **KNOPP,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Aufl. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. VII + 582 S. mit 14 Textfiguren. Preis 39,60 M.

Prof. Dr. techn. e. h. PHILIPP **FORCHHEIMER,** wirkl. Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien. Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden. 3. Aufl. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1931. 49 S. mit 31 Abb. im Text. Preis geh. 4,80 M.

AWF-Schrift 235: **Sonderrechenstäbe,** ihre Anwendung und ihr Entwurf, mit einer logarithmischen Teiltafel. Im Auftrage des Ausschusses für Rechentechnik beim AWF bearbeitet von Ing. Friedrich Bahlecke. Beuth-Verlag G. m. b. H., Berlin S 14 1931. 122 S. mit 48 Abb. Preis 4,80 M.

HARRY **SCHMIDT,** Prof. an der Gewerbehochschule Köthen, Privatdozent an der Universität Leipzig. Einführung in die Theorie der Wellengleichung. Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1931. VI + 146 S. 16 Figuren im Text.

Dr.-Ing. WILHELM **CAUER,** Siebschaltungen. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7 1931. 17 S. Text, 19 Abb., 14 Tabellen und 72 Taf.

Geh. Reg.-Rat Dr. J. **ZENNECK,** ord. Professor der Technischen Hochschule in München. Werner von Siemens und die Gründung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. (Schriftenreihe Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 3. Jahrgang 1931, Heft 1.) VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7 1931. 26 S. mit 21 Abb. und 9 Bildnissen. Brosch. 1 M.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Heft 10. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. 68 S. mit 92 Abb. im Text. Preis geh. 12 M.

A. M. **LEGENDRES** Tafeln der Elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Herausgegeben von Fritz Emde. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1931. I + 81 S. und 4 Fig. Preis geb. 3,50 M.

Dr. phil. RUDOLF **BEYER,** Zwickau. Zur graphischen Behandlung der Statik und Kinematik des Raumes. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht 1929/31 der Vereinigten Technischen Schulen Zwickau. 22 S.

Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München. 3. Folge. Herausgegeben von LUDWIG **FÖPPL.** Der ganzen Reihe 35. Heft. 41 S. mit 31 Abb. im Text und 10 Tafeln in Steindruck. Verlag Theodor Ackermann, München 1931. Preis 16,50 M.

NICOLAUS **KRYLOFF,** Ingénieur des Mines, Membre des Académies des Sciences d'Ukraine et de l'U.R.S.S. Heft 49 des Mémorial des Sciences

Mathématiques, publié sous le Patronage de l'Académie des Sciences de Paris: Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique. Verlag Gauthier-Villars & Cie., Paris 1931. 69 S.

Dr.-Ing. WALTHER **KAUFMANN**, ord. Prof. der Mechanik an der Techn. Hochschule Hannover, Angewandte Hydromechanik. Erster Band: Einführung in die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten. VIII + 232 S. mit 146 Textabbildungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. Preis geb. 14 M.

Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Jan.-März 1931. Anno II-Nr. 1. Verlag Antonio Milani, Padua 1931. 60 S.

Dr. ROBERT **HAUSSNER**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. WOLFGANG **HAACK**, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr, Darstellende Geometrie, Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Verlag Walter de Gruyter & Co., Sammlung Göschen 144. Band. Berlin-Leipzig 1931. 141 S. mit 65 Fig. im Text. Preis 1,80 M.

H. **SCHWERDT**, Studienrat am Falk-Realgymnasium in Berlin, Dozent an der Lehr- und Forschungsanstalt für Gartenbau, Dahlem, Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Für Mathematiker und Ingenieure. VII + 116 S. mit 240 Abb. im Text und auf 104 Tafeln. Verlag Jul. Springer, Berlin 1931. Preis geb. 28 M.

Dr. phil., Dr. ing. h. c. EMIL **MÜLLER** †, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Vorlesungen über darstellende Geometrie. III. Bd.: Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Bearbeitet von Dr. Josef Leopold Krames, a. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. VIII + 303 S. mit 153 Textfiguren und einer Tafel. Verlag Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1931. Preis 52,50 M.

Dr. H. **THORADE**, Probleme der Wasserwellen. Bd. XIII und XIV der „Probleme der Kosmischen Physik". Hrsg. v. Prof. Dr. Chr. Jensen und Prof. Dr. Arnold Schwaßmann. Verlag Henri Grand, Hamburg 1931. VIII + 219 S. Mit 5 Bildern in Lichtdruck, 4 Karten und 110 Abb. auf 11 Tafeln. Preis 20 M.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter GEORG **FEIGL**. Bd. 54, Jahrg. 1928. Sonderheft I: Geschichte, Philosophie, Pädagogik, Mengenlehre. 99 S. Preis 11,20 M. Sonderheft II: Arithmetik und Algebra. 115 S. Preis 13 M. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931.

TRACY YERKES **THOMAS**, Assistant Professor of Mathematics, Princetown University, The Elementary Theory of Tensors. Verlag McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London 1931. IX + 122 S. Preis sh. 10/—,

A. S. **EDDINGTON**, Das Weltbild der Physik und ein Versuch seiner philosophischen Deutung (The nature of the physical world). Aus dem Englischen übersetzt von Marie Freifrau Rausch v. Traubenberg und H. Diesselhorst. Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1931. VIII + 356 S.

Prof. Dr. M. **PIRANI**, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. 2. verb. Aufl., besorgt durch Dr. I. Runge. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. Sammlung Göschen. Bd. 728. 149 S. mit 71 Abb. Preis 1,80 M.

Dr. RICHARD VON **MISES**, ord. Prof. a. d. Universität Berlin, Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. I. Bd.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. X + 574 S. mit 90 Abb. im Text. Verlag Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1931. Preis geb. 33 M.

Dr. HUGO **DINGLER**, Professor an der Universität München, Philosophie der Logik und Arithmetik. 198 S. Verlag Ernst Reinhardt, München 1931. Preis geb. 9,80 M.

Prof. Piccards Forschungsflug in die Stratosphäre. Verlauf des Stratosphärenfluges und dessen wissenschaftliches Ergebnis. Mit Beiträgen von Professor Piccard, Ingenieur Kipfer und anderen Sachverständigen. Hrsg. v. d. „Neuen Augsburger Zeitung". Verlag des Literar. Instituts von Haas & Grabherr, Augsburg 1931. 128 S. mit 50 Abb. Preis kart. 3,80 M.

LEON **LICHTENSTEIN**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differential-Gleichungen nebst Anwendungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. VII + 164 S. Preis kart. 16,80 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 19. Juni sprach Hr. Prof. Dr. H. Reißner (Berlin) über „Freie Flüssigkeitsstrahlen".

Am 17. Juli sprach Hr. Prof. Dr. G. Hamel (Berlin) über „Widerstand eines Zylinders in wirbelfreier, stationärer Bewegung einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit".

Ortsgruppe Göttingen.

Am 22. Juli sprach Hr. Prof. V. Bjerknes (Oslo) über „Hydrodynamisch-thermodynamische Diskussion der atmosphärischen Zirkulationsbewegung".

In derselben Sitzung sprach Hr. Prof. H. Solberg (Oslo) über „Atmosphärische Wellen".

Hauptversammlung 1931
in Bad Elster.

Für die Hauptversammlung, die im Rahmen des 7. Deutschen Physiker- und Mathematikertages in Bad Elster vom 13. bis 16. September abgehalten wird, ist folgende Tagesordnung festgesetzt:

Sonntag, den 13., abends, Begrüßung der Teilnehmer.

Montag, den 14., vormittags, allgemeine Sitzung, Begrüßungen. Hieran anschließend erste Fachsitzung.

Montag, den 14., nachmittags, Dienstag, den 15., vor- und nachmittags, zweite, dritte und vierte Fachsitzung.

Mittwoch, den 16., vormittags, Geschäftssitzung der Gesellschaft.

Für die Fachsitzungen der Gesellschaft sind folgende Vorträge vorgesehen:

I. Montag vormittag:

1. A. Weinstein (Breslau): Über die Strömung in einer durchlässigen Talsperre.
2. St. Bergmann (Berlin): Über Flüssigkeitsbewegungen mit Unstetigkeitsflächen.
3. L. Prandtl (Göttingen): Über Turbulenzentstehung.
4. J. Nikuradse (Göttingen): Strömungswiderstand in rauhen Rohren.

II. Montag nachmittag:

5. O. Flachsbart (Göttingen): Spaltverluste an Tragflügeln.
6. O. Schrenk (Göttingen): Über eine einfache Geschwindigkeitsregelung für Windstromanlagen.
7. F. Eisner (Berlin): Überfallversuche in verschiedener Modellgröße.
8. J. W. Maccoll-Woolwich (London): Über die theoretische Strömung um einen Kreiszylinder bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen.
9. K. Hohenemser (Göttingen): Neuere Versuchsergebnisse über das plastische Verhalten der Metalle.

III. Dienstag vormittag:

10. C. Weber (Dresden): Berührung von gewölbten Oberflächen beim ebenen Verzerrungszustande.
11. H. Schmidt (Köthen): Beiträge zur Statik und Dynamik der Rechteckplatte.
12. E. Schäfer (Dahlem): Ein Beitrag zur Theorie der nichtharmonischen Schwingungen.
13. R. Iglisch (Aachen): Einige Bemerkungen zum Duffingschen Schwingungsproblem.
14. G. Schulz (Berlin): Über Markoffsche Ketten.
15. M. Herzberger (Jena): Vektoranalyse in mehrdimensionalen Räumen und lineare Transformation.

IV. Dienstag nachmittag:

16. G. Stein (Berlin): Mathematische Untersuchungen über die Verteilung der Ströme und Verluste in der gegenseitigen Blechisolation von Transformatoren.
17. W. Cauer (Göttingen): Beschränkte Funktionen und Wechselstromschaltungen.
18. E. Weinel (Göttingen): Über achsensymmetrische Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie.
19. R. Beyer (Zwickau): Neue Wege zur zeichnerischen Behandlung der räumlichen Mechanik.
20. J. Picht (Neubabelsberg): Über neue Integraphen der Askania-Werke.
21. L. Holzer (Graz): Über nomographische Auflösung von Differentialgleichungen.

Am Mittwoch findet die Geschäftsversammlung mit folgender Tagesordnung statt: 1. Geschäftsbericht. 2. Jahresbeitrag. 3. Ergänzungswahlen für den Vorstandsrat. 4. Nächste Versammlung. 5. Allfälliges.

Internationaler Kongreß für Materialprüfung in Zürich.

Der Neue Internationale Verband für Materialprüfungen veranstaltet seinen 1. Internationalen Kongreß vom 6. bis 12. September 1931 in Zürich. Behandelt werden in:

Gruppe A (Metalle): Gußeisen, Festigkeitseigenschaften von Metallen bei hohen Temperaturen; Ermüdung; Kerbschlagfestigkeit; Fortschritte der Metallographie.

Gruppe B (Nichtmetallische anorganische Stoffe): Natürliche Steine; Portlandzemente; Zemente mit hydraulischen Zuschlägen; Tonerde-Schmelzzemente; Beton; Chemische Einflüsse auf Zement und Beton; Eisenbeton.

Gruppe C (Organische Stoffe): Alterung organischer Stoffe; Holz; Asphalt und Bitumen; Brennstoffe.

Gruppe D (Fragen von allgemeiner Bedeutung): Begriffliche und prüfmethodische Beziehungen zwischen Elastizität und Plastizität, Zähigkeit und Sprödigkeit; Bestimmungen der Größe von losen Körnern; Eichung und Genauigkeit von Prüfmaschinen.

Nähere Auskunft und Vermittlung von Teilnehmerkarten durch den Deutschen Verband für die Materialprüfungen der Technik, Berlin NW 7, Ingenieurhaus.

Internationaler Mathematikerkongreß Zürich 1932.

Dem von dem Internationalen Mathematikerkongreß in Bologna im Jahre 1928 gefaßten Beschluß entsprechend wird vom 4. bis 12. September 1932 in Zürich ein Internationaler Mathematikerkongreß stattfinden, auf den das Organisationskomitee bereits jetzt hinweist. Die ersten genaueren Mitteilungen und Einladungen werden im Oktober 1931 verschickt werden. Das vorgesehene wissenschaftliche Programm besteht aus einer größeren Reihe von allgemeinen Vorträgen, durch die ein möglichst vollständiges Bild des gegenwärtigen Standes der Mathematik gegeben werden soll, und aus Sektionssitzungen, die für kürzere Mitteilungen über Ergebnisse neuer Untersuchungen bestimmt sind.

Persönliches.

An der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich wurde eine neuerrichtete Professur für Aeromechanik dem bisherigen Privatdozenten Hrn. Dr. J. Ackeret übertragen.

Hr. Prof. Dr. C. Matschoß von der Technischen Hochschule Berlin ist von der Philosophischen Fakultät der Universität Münster i. W. zum Ehrendoktor ernannt worden.

Am 16. Juli starb an einem Herzschlag Herr Ladislaus v. Bortkiewicz, Professor der mathematischen Statistik und der Volkswirtschaftslehre an der Universität Berlin. Er war der bedeutendste Forscher auf dem Gebiete der mathematischen Statistik in Deutschland, und weit darüber hinaus durch seine Arbeiten bekannt. Unsere Zeitschrift verdankt ihm einen Beitrag, der eine interessante Frage der Fehlertheorie behandelt und im zweiten Bande erschienen ist.

Herr Dr. E. Honegger, bisher Privatdozent an der Technischen Hochschule Zürich, ist zum außerordentlichen Professor für Textilmaschinenbau an dieser Hochschule ernannt worden.

In der Fakultät für Bauwesen an der Technischen Hochschule Charlottenburg hat sich Herr Dr.-Ing. P. Neményi als Privatdozent für Baumechanik habilitiert.

Herr Dr. Frank Loebell, bisher Privatdozent an der Technischen Hochschule ist daselbst zum ord. Professor der Darstellenden Geometrie (als Nachfolger von G. Doetsch) ernannt worden.

Berichtigung zu dem Aufsatz: H. Lenk, „Die Bewegungsgleichungen des rollenden Rades", Heft 3, S. 206.

Es soll stehen: Auf Seite 207, dritter Absatz von oben, zweite Zeile

.... die fünf Koordinaten $X, Y, \underline{T}, \vartheta, \psi$, ... (und nicht .... die fünf Koordinaten $X, Y, \underline{Z}, \vartheta, \psi$ ....).

Auf Seite 216 soll in den beiden ersten Formeln (36) stehen:

$$\begin{matrix} \ldots, \text{ wenn } \omega_x' \neq 0 \\ \ldots, \text{ wenn } \omega_y'' \neq 0 \end{matrix} \quad \left(\text{und nicht } \begin{matrix} \ldots, \text{ wenn } \omega_x' = 0 \\ \ldots, \text{ wenn } \omega_y'' = 0 \end{matrix}\right).$$

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. —
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.